6. *Алексеев Г. В., Комаров Е. Г.* Численное исследование экстремальных задач теории излучения звука в плоском волноводе // Математическое моделирование. 1991. – **3**, № 12. – С. 52–64.
7. *Васильев П. Ф.* Методы решения экстремальных задач. – Москва: Наука, 1981. – 400 с.
8. *Самарский А. А., Гулин А. В.* Устойчивость разностных схем. – Москва: Наука, 1973. – 416 с.

*Інститут кібернетики ім. В. М. Глушкова*
*НАН України, Київ*

*Надійшло до редакції 12.02.2002*

УДК 519



Член-корреспондент НАН Украины **Л. П. Хорошун**

# Математическая модель динамики денег и цен в макроэкономике при простом воспроизводстве

*A mathematical model of the dynamics of money and prices is proposed at simple reproduction if there are two sectors — enterprises and homeholds. The production of investment goods and amortization of capital aren't taken into account. The model is based on the nonstationary balance equations of goods and money supplies. Consuming and expendable prices are considered, and their linear dependences on the money supply in sectors are introduced. The dynamical differential equations for the money supplies in sectors and prices are constructed. The time evolution of inflation at a saltatory change of parameters of the cycle is investigated. The dependences of the turnover rate of money supplies on production and consumption and the rate of inflation on the rates of money growth, production, and consumption are obtained.*

Макроэкономическая теория денег и цен, как известно [1–3], базируется на уравнении обмена, представляющем собой равенство произведений уровня цен на реальный ВВП и количества денег на скорость их обращения (монетаристская модель), или на равенстве национального дохода сумме всех расходов (кейнсианская модель). Обе модели предполагают равновесное состояние макроэкономики, поэтому попытки применить их к описанию нестационарных процессов, таких как инфляция, спад или подъем производства, могут приводить к серьезным погрешностям.

В настоящей работе предлагается математическая модель динамики денег и цен в макроэкономике, которая базируется на нестационарных уравнениях баланса товарной и денежной масс. Исследуется самый простой вариант — простое воспроизводство с участием предпринимательского сектора и сектора домашних хозяйств без учета производства инвестиционных товаров и амортизации капитала. Рассматриваются две цены продукции — затратная и потребительская, а также вводятся линейные зависимости между ними и денежными массами предпринимательского сектора и домашних хозяйств. Построена система дифференциальных уравнений динамики денежных масс секторов и цен. Исследовано развитие инфляции во времени при скачкообразном изменении параметров состояния кругооборота. Получены зависимости скорости оборота денежной массы от производства и потребления, а также темпа инфляции от темпов приращения денежной массы, производства и потребления.

Рассмотрим самый простой вариант экономического кругооборота, когда субъектами рынка выступают только два сектора — предприятия и домашние хозяйства (финансовые

и торговые посредники отсутствуют), а воспроизводство является простым. При этом не учитываем амортизацию капитала и производство инвестиционных товаров, что можно допустить для определенного временного интервала. Тогда реальный ВВП состоит только из производства определенного количества потребительских товаров в единицу времени $\dot{m}$ [4] и уравнение баланса товарной массы можно представить в виде

$$\dot{m}_1 = \dot{m} - \dot{m}_{11} - \dot{m}_{12}. \tag{1}$$

Здесь $m_1$ — товарные запасы сектора 1 (предприятия); $\dot{m}_{11}$ — количество потребляемых сектором 1 товаров в единицу времени, включая потери; $\dot{m}_{12}$ — количество потребляемых товаров через рынок благ в единицу времени сектором 2 (домашние хозяйства). При этом для простоты полагаем, что товарные запасы в секторе 2 не образуются.

Предположим, что кроме рынка благ существует только рынок труда, т. е. другими ресурсами предприятия обеспечены. Тогда можно записать уравнения баланса денежных масс

$$\begin{aligned} \dot{M}_1 &= \dot{M}_{21}^m - \dot{M}_{12}^T + \dot{M}_э, \\ \dot{M}_2 &= \dot{M}_{12}^T - \dot{M}_{21}^m. \end{aligned} \tag{2}$$

Здесь $M_1$, $M_2$ — денежные массы соответствующих секторов; $\dot{M}_{21}^m$ — поток денег в единицу времени из сектора 2 в сектор 1, обусловленный куплей-продажей благ $\dot{m}_{12}$; $\dot{M}_{12}^T$ — поток денег в единицу времени из сектора 1 в сектор 2, обусловленный куплей-продажей труда $\dot{T}_{21}$; $\dot{M}_э$ — эмиссия денег в единицу времени, осуществляемая сектором 1. При этом денежные потоки $\dot{M}_{21}^m$, $\dot{M}_{12}^T$ определяются соотношениями

$$\dot{M}_{21}^m = P\dot{m}_{12}, \qquad \dot{M}_{12}^T = W\dot{T}_{21} \tag{3}$$

где $P$ — потребительская цена благ; $W$ — заработная плата. Денежнотоварные потоки, связанные с кредитом, погашением долгов и безналичным расчетом, здесь не учитываются.

Поток денег $\dot{M}_{12}^T$ затрачивается сектором 1 на оплату труда по производству в единицу времени $\dot{m}$ потребительских товаров, т. е. можно записать равенство

$$\dot{M}_{12}^T = W\dot{T}_{21} = P'\dot{m}, \tag{4}$$

где $P'$ — затратная цена благ. Тогда с учетом (3), (4) уравнения баланса денежных масс (2) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \dot{M}_1 &= P\dot{m}_{12} - P'\dot{m} + \dot{M}_э, \\ \dot{M}_2 &= P'\dot{m} - P\dot{m}_{12}. \end{aligned} \tag{5}$$

На основе (1), (5) приходим к соотношению

$$\dot{M}_1 - \dot{M}_э + P(\dot{m}_1 + \dot{m}_{11}) = (P - P')\dot{m}, \tag{6}$$

откуда следует, что прибыль сектора 1 обусловлена разностью потребительской и затратной цен.

Согласно (5), спрос сектора 2 на рынке благ характеризует параметр $\dot{m}_{12}$, который обратно пропорционален потребительской цене $P$. Предложение сектором 1 потребительских товаров сектору 2, очевидно, характеризуется производимыми благами за вычетом

потребляемых сектором 1, т. е. $\dot{m} - \dot{m}_{11} = \dot{m}_1 + \dot{m}_{12}$. Этот параметр, согласно (5), увеличивается или уменьшается соответственно при увеличении или уменьшении потребительской цены $P$, если остальные параметры зафиксированы.

Равновесный или стационарный кругооборот в рассматриваемой модели экономики имеет место при условии

$$\begin{aligned} &\dot{M}_1 = 0, \qquad \dot{M}_2 = 0, \qquad \dot{M}_э = 0, \qquad \dot{m}_1 = 0, \qquad P = P^0, \qquad P' = P'^0, \\ &\dot{m} = \dot{m}^0, \qquad \dot{m}_{12} = \dot{m}_{12}^0, \end{aligned} \tag{7}$$

где $P^0$, $P'^0$, $\dot{m}^0$, $\dot{m}_{12}^0$ — постоянные. В этом случае денежные потоки (3) также постоянны, равны между собой и могут быть представлены в виде

$$\dot{M}_{21}^{m0} = \dot{M}_{12}^{T0} = M^0 V^0, \tag{8}$$

где $M^0$ — постоянная общая денежная масса; $V^0$ — постоянная скорость оборота денежной массы $M^0$. При этом уравнения баланса денежных масс (5) сводятся к равенствам

$$P^0 \dot{m}_{12}^0 = P'^0 \dot{m}^0 = M^0 V^0, \tag{9}$$

из которых следует известное уравнение обмена

$$P^0 \dot{m}^0 = M^0 V^0 \tag{10}$$

при условии, что можно пренебречь количеством благ, потребляемых сектором 1, т. е. $\dot{m}_{11} \approx 0$.

Равенство (10), как известно, является основополагающим уравнением монетаризма. Из него определяют темп инфляции [1, 5]. Для этого необходимо предположить, что из стационарного состояния $P^0$, $\dot{m}^0$, $\dot{M}_{21}^{m0} = M^0 V^0$ экономика переходит в новое стационарное состояние $P^0 + \Delta P$, $\dot{m}^0 + \Delta m$, $\dot{M}_{21}^{m0} + \Delta \dot{M}_{21}^{m} = (M^0 + \Delta M)(V^0 + \Delta V)$, удовлетворяющее уравнению обмена

$$(P^0 + \Delta P)(\dot{m}^0 + \Delta m) = \dot{M}_{21}^{m0} + \Delta \dot{M}_{21}^{m}. \tag{11}$$

Тогда из (10), (11) следует выражение для темпа инфляции

$$\frac{\Delta P}{P^0} = \frac{1}{1 + \frac{\Delta m}{\dot{m}^0}} \left( \frac{\Delta \dot{M}_{21}^{m}}{\dot{M}_{21}^{m0}} - \frac{\Delta \dot{m}}{\dot{m}^0} \right), \tag{12}$$

где темп приращения потока денег определяется тождеством

$$\frac{\Delta \dot{M}_{21}^{m}}{\dot{M}_{21}^{m0}} = \frac{\Delta M}{M^0} + \frac{\Delta V}{V^0} + \frac{\Delta M \Delta V}{M^0 V^0}. \tag{13}$$

Если бы величина (13) была не зависимой от $\dfrac{\Delta \dot{m}}{\dot{m}^0}$, то равенство (12) определяло бы конкретный вид зависимости темпа инфляции $\dfrac{\Delta P}{P^0}$ от темпа приращения производства $\dfrac{\Delta \dot{m}}{\dot{m}^0}$ (гиперболическую в общем случае или линейную при $\dfrac{\Delta \dot{m}}{\dot{m}^0} \ll 1$). Однако в действительности величина $\dfrac{\Delta \dot{M}_{21}^{m}}{\dot{M}_{21}^{m0}}$ непосредственно связана с $\dfrac{\Delta \dot{m}}{\dot{m}^0}$, поэтому невозможно сделать вывод

о конкретной зависимости между $\dfrac{\Delta P}{P^0}$ и $\dfrac{\Delta \dot{m}}{\dot{m}^0}$, исходя только из уравнения обмена (10). Для этого необходимо рассмотреть более общие уравнения нестационарного кругооборота.

Чтобы описать нестационарные процессы в рассматриваемой модели экономики, уравнений (5) недостаточно. Для их замыкания необходимо сформулировать дополнительные соотношения, отображающие физическую связь между определенными параметрами, входящими в (5). Такими параметрами являются денежные массы секторов $M_1$, $M_2$ и цены $P$, $P'$, которые не могут быть независимыми, так как уровень цен связан с денежной массой подобно связи температуры вещества с теплом через коэффициент теплоемкости. Очевидно, что затратная цена $P'$ зависит прежде всего от массы денег $M_1$, которую сектор 1 затрачивает на оплату труда, хотя определенную роль может играть потребность в деньгах сектора 2, которая определяется наличием денежной массы $M_2$. Потребительская цена $P$ в первую очередь определяется покупательной способностью сектора 2, т. е. денежной массой $M_2$, хотя в определенной степени на нее может влиять наличие денежной массы $M_1$ в секторе 1. Исходя из этих соображений, можно сформулировать в линейном приближении зависимости

$$P' = \gamma_{11} M_1 + \gamma_{12} M_2, \qquad P = \gamma_{21} M_1 + \gamma_{22} M_2, \tag{14}$$

где постоянные $\gamma_{11}$, $\gamma_{22}$ — положительные, постоянные $\gamma_{12}$, $\gamma_{21}$ — по модулю значительно меньше $\gamma_{11}$, $\gamma_{22}$ и могут быть отрицательными.

Следует отметить, что цены должны зависеть не только от денежных масс секторов, но и от товарных запасов $m_1$, однако для упрощения задачи здесь этот фактор не учитывается.

Подставляя (14) в (5), получим систему дифференциальных уравнений относительно денежных масс секторов

$$\begin{aligned} \dot{M}_1 &= (\gamma_{21}\dot{m}_{12} - \gamma_{11}\dot{m})M_1 + (\gamma_{22}\dot{m}_{12} - \gamma_{12}\dot{m})M_2 + \dot{M}_э, \\ \dot{M}_2 &= (\gamma_{11}\dot{m} - \gamma_{21}\dot{m}_{12})M_1 + (\gamma_{12}\dot{m} - \gamma_{22}\dot{m}_{12})M_2, \end{aligned} \tag{15}$$

которую преобразуем к виду

$$\dot{M} = \dot{M}_э, \qquad \dot{M}' + \varphi M' + \psi M = \dot{M}_э, \tag{16}$$

где обозначено

$$\begin{aligned} &M = M_1 + M_2, \qquad M' = M_1 - M_2, \qquad \varphi = (\gamma_{11} - \gamma_{12})\dot{m} + (\gamma_{22} - \gamma_{21})\dot{m}_{12}, \\ &\psi = (\gamma_{11} + \gamma_{12})\dot{m} - (\gamma_{22} + \gamma_{21})\dot{m}_{12}. \end{aligned} \tag{17}$$

Решение системы (16) определяется формулами

$$\begin{aligned} &M = M_0 + M_э, \\ &M' = \exp\left[-\int_0^t \varphi(t)\,dt\right]\left\{M_0' - \int_0^t [\psi(t)(M_0 + M_э) - \dot{M}_э]\exp\left[\int_0^t \varphi(t)\,dt\right]dt\right\}, \end{aligned} \tag{18}$$

где $M_0$, $M_0'$ — начальные значения соответственно общей денежной массы и разности денежных масс секторов.

Если подставить (5) в (14), то после некоторых преобразований и частичного интегрирования придем к дифференциальным уравнениям относительно потребительской цены

$$\dot{P} + \varphi P = \gamma(M_0 + M_э)\dot{m} + \gamma_{21}\dot{M}_э \qquad (\gamma = \gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}\gamma_{21}) \tag{19}$$

и затратной цены

$$\dot{P}' + \varphi P' = \gamma(M_0 + M_э)\dot{m}_{12} + \gamma_{11}\dot{M}_э. \tag{20}$$

Их решения определяются интегралами

$$P = \exp\left[-\int_0^t \varphi(t)\,dt\right]\left\{P_0 + \int_0^t [\gamma(M_0 + M_э)\dot{m} + \gamma_{21}\dot{M}_э]\exp\left[\int_0^t \varphi(t)\,dt\right]dt\right\}, \tag{21}$$

$$P' = \exp\left[-\int_0^t \varphi(t)\,dt\right]\left\{P_0' + \int_0^t [\gamma(M_0 + M_э)\dot{m}_{12} + \gamma_{11}\dot{M}_э]\exp\left[\int_0^t \varphi(t)\,dt\right]dt\right\}, \tag{22}$$

где $P_0$, $P_0'$ — начальные значения соответствующих цен.

Для стационарного кругооборота из (19), (20), согласно (7), имеем

$$P^0 = \frac{\gamma M^0 \dot{m}^0}{\gamma_1 \dot{m}^0 + \gamma_2 \dot{m}_{12}^0}, \qquad P'^0 = \frac{\gamma M^0 \dot{m}_{12}^0}{\gamma_1 \dot{m}^0 + \gamma_2 \dot{m}_{12}^0} \qquad (\gamma_1 = \gamma_{11} - \gamma_{12}, \quad \gamma_2 = \gamma_{22} - \gamma_{21}). \tag{23}$$

Подставляя (23) в (14), найдем распределение денег по секторам

$$M_1^0 = \frac{\gamma_{22}\dot{m}_{12}^0 - \gamma_{12}\dot{m}^0}{\gamma_1 \dot{m}^0 + \gamma_2 \dot{m}_{12}^0} M^0, \qquad M_2^0 = \frac{\gamma_{11}\dot{m}^0 - \gamma_{21}\dot{m}_{12}^0}{\gamma_1 \dot{m}^0 + \gamma_2 \dot{m}_{12}^0} M^0. \tag{24}$$

Из (9), (23) находим скорость оборота денежной массы

$$V^0 = \frac{\gamma \dot{m}^0 \dot{m}_{12}^0}{\gamma_1 \dot{m}^0 + \gamma_2 \dot{m}_{12}^0}, \tag{25}$$

т. е. она непосредственно связана со скоростями производства и потребления продукции.

Если рассмотреть новое стационарное состояние $P^0 + \Delta P$, $M^0 + \Delta M$, $\dot{m}^0 + \Delta\dot{m}$, $\dot{m}_{12}^0 + \Delta\dot{m}_{12}$, удовлетворяющее, согласно (23), уравнению

$$P^0 + \Delta P = \frac{\gamma(M^0 + \Delta M)(\dot{m}^0 + \Delta\dot{m})}{\gamma_1(\dot{m}^0 + \Delta\dot{m}) + \gamma_2(\dot{m}_{12}^0 + \Delta\dot{m}_{12})}, \tag{26}$$

то из (23), (26) получим выражение темпа инфляции для потребительской цены

$$\frac{\Delta P}{P^0} = \frac{\mu - \varepsilon}{1 + \varepsilon}, \tag{27}$$

где обозначено

$$\varepsilon = \frac{\gamma_2(r' - r)q}{(\gamma_1 + \gamma_2 r)(1 + q)}, \qquad \mu = \frac{\Delta M}{M^0}, \qquad q = \frac{\Delta\dot{m}}{\dot{m}^0}, \qquad r = \frac{\dot{m}_{12}^0}{\dot{m}^0}, \qquad r' = \frac{\Delta\dot{m}_{12}}{\Delta\dot{m}}. \tag{28}$$

Как видим, на характер зависимости темпа инфляции от темпа приращения производства $q$ существенное влияние оказывает знак разности $r' - r$. При $r' > r$ темп инфляции уменьшается с ростом производства, а при $r' < r$ увеличивается, что связано с влиянием темпа приращения потребления. При $r' = r$ инфляция определяется только приращением денежной массы, т. е. имеет место формула монетаристов.

Аналогично (26), для затратной цены в новом стационарном состоянии можем, согласно (23), записать

$$P'^0 + \Delta P' = \frac{\gamma(M^0 + \Delta M)(\dot{m}_{12}^0 + \Delta\dot{m}_{12})}{\gamma_1(\dot{m}^0 + \Delta\dot{m}) + \gamma_2(\dot{m}_{12}^0 + \Delta\dot{m}_{12})}. \tag{29}$$

Отсюда с учетом (23) получим выражение темпа инфляции для затратной цены

$$\frac{\Delta P'}{P'^0} = \frac{\mu + \sigma}{1 + \varepsilon}, \qquad \sigma = \left(\mu + \frac{\gamma_1}{\gamma_1 + \gamma_2 r}\right)\frac{(r' - r)q}{r(1 + q)}. \tag{30}$$

Анализ зависимости (30) показывает, что в отличие от (27) темп инфляции для затратной цены при $r' > r$ возрастает с ростом производства, а при $r' < r$ уменьшается. При $r' = r$ инфляция связана только с ростом денежной массы.

Вычисление темпа инфляции на основе равенств (23), (26), (29) для двух стационарных состояний кругооборота справедливо только при скачкообразном изменении состояния и по истечении длительного промежутка времени. Однако в действительности развитие инфляции происходит во времени как при быстром, так и при медленном изменении состояния кругооборота, поэтому для более точного ее описания необходимо пользоваться динамическими уравнениями (19), (20), особенно в случае переходного периода экономики.

Рассмотрим задачу скачкообразного изменения состояния кругооборота в динамической постановке. Пусть в начальный момент времени $t = 0$ экономика находится в состоянии стационарного кругооборота (23). В момент времени $t = t_1$ происходит скачкообразное изменение параметров $M_э, \dot{m}, \dot{m}_{12}$, т. е.

$$\begin{aligned} &\dot{M}_э(t) = \Delta M\delta(t - t_1), \qquad M_э(t) = \Delta M\sigma(t - t_1), \\ &\dot{m}(t) = \dot{m}^0 + \Delta\dot{m}\sigma(t - t_1), \qquad \dot{m}_{12} = \dot{m}_{12}^0 + \Delta\dot{m}_{12}\sigma(t - t_1), \end{aligned} \tag{31}$$

где $\delta(t - t_1)$ — $\delta$-функция Дирака; $\sigma(t - t_1)$ — функция единичного скачка. Подставляя (31) в (21), находим темп инфляции для потребительской цены как функцию времени

$$\frac{\Delta P}{P^0} = \frac{P - P^0}{P^0} = \frac{\gamma_{21}(\gamma_1 + \gamma_2 r)\mu}{\gamma}e^{-\alpha(t - t_1)} + \frac{\mu - \varepsilon}{1 + \varepsilon}\left(1 - e^{-\alpha(t - t_1)}\right) \qquad (t > t_1), \tag{32}$$

где $\alpha = \dot{m}^0(\gamma_1 + \gamma_2 r)(1 + q)(1 + \varepsilon)$.

Отсюда видно, что в краткосрочном периоде, т. е. в момент времени $t$, близкий к $t_1$, темп инфляции определяется первым слагаемым. С течением времени первое слагаемое убывает, а второе возрастает. В долгосрочном периоде, т. е. при $t - t_1 \gg \dfrac{1}{\alpha}$, приходим к стационарному значению (27).

Подставляя (31) в (22), находим темп инфляции для затратной цены

$$\frac{\Delta P'}{P'^0} = \frac{P' - P'^0}{P'^0} = \frac{\gamma_{11}(\gamma_1 + \gamma_2 r)\mu}{\gamma r}e^{-\alpha(t - t_1)} + \frac{\mu + \sigma}{1 + \varepsilon}\left(1 - e^{-\alpha(t - t_1)}\right) \qquad (t > t_1), \tag{33}$$

характер изменения которого во времени аналогичен (32).

В заключение отметим, что при скачкообразном изменении параметров $M$, $\dot{m}$, $\dot{m}_{12}$ в виде (31) решения уравнений (19), (20) находятся в аналитическом виде (32), (33). При более сложном изменении параметров решение можно строить численными методами или приближенно аппроксимировать последовательностью скачкообразных изменений.


1. *Долан Э. Дж. и др.* Деньги, банковское дело и денежно-кредитная политика / Пер. с англ. В. Лукашевича и др.; Под общ. ред. В. Лукашевича. – Л., 1991. – 448 с.
2. *Селищев А. С.* Макроэкономика. – Санкт-Петербург: Изд-во «Питер», 2000. – 448 с.
3. *Менкью Н. Г.* Макроэкономика / Пер. с англ. – Москва: Изд-во МГУ, 1994. – 226 с.
4. *Хорошун Л. П.* Дифференциальные уравнения динамики производства в макроэкономике // Доп. НАН України. – 2002. – № 4. – С. 83–90.
5. *Павловський М. А.* Макроекономіка перехідного періоду. Український контекст. – Київ: Техніка, 1999. – 336 с.



*Институт механики им. С. П. Тимошенко*
*НАН Украины, Киев*



*Поступило в редакцию 12.03.2002*