

ДИНАМИКА МНОГОСЕКЦИОННЫХ ПОЛУПРОВОДНИКОВЫХ ЛАЗЕРОВ

© 2003 г. **Я. ЗИБЕР, Л. РЕККЕ, К. Р. ШНАЙДЕР**

Аннотация. Рассматривается математическая модель (так называемая система бегущих волн), описывающая продольные динамические эффекты в полупроводниковых лазерах. Данная модель состоит из линейной гиперболической системы уравнений в частных производных и медленной системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Доказывается, что соответствующая начально-краевая задача корректна и при этом порождает гладкую бесконечномерную динамическую систему. Используя особую медленно-быструю структуру, мы получаем условия, при которых существует экспоненциально притягивающее инвариантное многообразие малой размерности. Поток на этом инвариантном многообразии описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений. Изучаются приближенные режимы указанной системы методами теории бифуркаций, а также численно.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение	70
2. Модель	71
3. Математический анализ модели	73
4. Редуцированная система	76
5. Модовое приближение	79
Список литературы	81

1. ВВЕДЕНИЕ

В последнее время резко возрос обмен мультимедийной информацией как в деловой, так и в частной сферах. Поток данных растет экспоненциально и характеризуется смещением от передачи голосовых данных к передаче пакетных данных. В связи с этим возникает насущная необходимость в существенном увеличении скорости передачи данных. Это в свою очередь обуславливает интерес к полупроводниковым лазерам — оптическим устройствам, позволяющим чрезвычайно быстро ретранслировать информацию (амплитуду, синхронизацию, форму) в оптических сетях. Как правило, такие устройства имеют нестационарный рабочий режим. В качестве примера отметим режим высокочастотных колебаний. Многосекционные лазеры позволяют генерировать и управлять такими нелинейными явлениями за счет наличия продольной структуры (см., например, [13, 23]).

Хорошо известно, что производство многосекционных полупроводниковых лазеров — весьма дорогостоящий и длительный процесс. Цель данной статьи — показать, что для изучения продольной динамики лазеров и оптимизации их рабочего режима могут быть использованы математические модели.

Учитывая некоторые физические предположения, которые можно проверить экспериментально, мы можем ограничиться одной специальной моделью, описывающей продольную динамику многосекционных полупроводниковых лазеров, с двумя физическими переменными: E — амплитудой

Исследования Я. Зибера велись при поддержке фонда: Sonderforschungsbereich 555 «Komplexe Nichtlineare Prozesse» of the Deutsche Forschungsgemeinschaft.

светового поля и n — плотностью носителей в активной зоне лазера. Соответствующая математическая модель имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= H(n)E, \\ \frac{dn}{dt} &= \varepsilon(I - n - g(n)[E, E]). \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь E — комплексный вектор, зависящий от времени t и одномерной пространственной переменной z , характеризующей продольное направление в лазере; n — вещественный вектор, зависящий только от времени и описывающий пространственное усреднение плотности носителей в секциях лазера; $H(n)$ — дифференциальный оператор первого порядка по переменной z . Таким образом, система (1.1) есть объединение линейной системы дифференциальных уравнений в частных производных относительно E и системы обыкновенных дифференциальных уравнений относительно n . Переменным E и n соответствуют различные временные масштабы, что определяет медленно-быструю структуру системы (1.1). Данный факт выражается наличием малого параметра ε , равного отношению среднего времени жизни фотона к среднему времени жизни носителей. Наконец, g — это эрмитова форма, обеспечивающая симметрию системы (1.1) относительно поворота комплексной переменной E .

Наличие малого параметра ε и особой структуры (1.1) позволяет сформулировать условия, гарантирующие существование конечномерного инвариантного многообразия, такого, что рассматриваемая модель может быть сведена к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Зависимость качественных свойств сведенной модели от различных параметров может быть изучена при помощи хорошо известных методов продолжения, позволяющих численно получить бифуркационную диаграмму на плоскости соответствующих параметров.

В разделе 2 описывается специальная математическая модель, так называемая система бегущих волн, включающая в себя гиперболическую систему дифференциальных уравнений в частных производных, систему обыкновенных дифференциальных уравнений, а также начальные и краевые условия. В разделе 3 будет показано, что соответствующая начально-краевая задача корректна. В разделе 4, используя специальные свойства и особую структуру системы бегущих волн, мы получим условия, при которых система бегущих волн может быть сведена к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Последняя может быть аппроксимирована упрощенной системой обыкновенных дифференциальных уравнений, которая с физической точки зрения является модовым разложением исходной системы. В заключительном разделе 5 проводится численный анализ бифуркаций системы. Данный анализ позволяет утверждать, что многосекционные полупроводниковые лазеры могут быть сконструированы так, что будут иметь место нестационарные рабочие режимы.

2. МОДЕЛЬ

Существует целая иерархия моделей, описывающих поведение полупроводниковых лазеров, начиная с уравнений Максвелла—Блоха и заканчивая системами дифференциальных уравнений с запаздыванием и простыми балансными уравнениями [22]. В нашей работе будет изучена *модель бегущих волн*, описывающая эффекты, возникающие в узких неоднородных лазерных диодах в продольном направлении.

Данная модель состоит из гиперболической системы уравнений в частных производных и системы обыкновенных дифференциальных уравнений [2, 11, 20]. Для того чтобы учесть дисперсию нелинейного усиления, к указанной модели добавляются уравнения поляризации [1, 2, 5, 18]. В данном разделе мы рассмотрим соответствующую систему дифференциальных уравнений и сформулируем основные предположения относительно ее коэффициентов.

Пусть $\psi(t, z) \in \mathbb{C}^2$ описывает комплексную амплитуду оптического поля, состоящего из волны, бегущей вперед, и волны, бегущей назад. Пусть $p(t, z) \in \mathbb{C}^2$ — соответствующая нелинейная поляризация. Обе эти величины зависят от времени и от одномерной пространственной переменной $z \in [0, L]$ (продольное направление в лазере). Вектор $n(t) \in \mathbb{R}^m$ соответствует пространственно усредненным плотностям носителя внутри каждой из секций лазера (см. рис. 1).

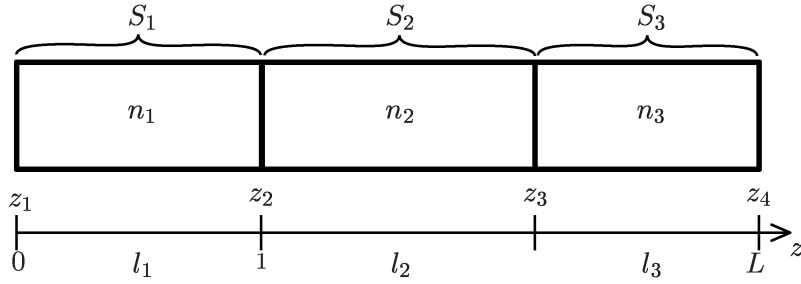


Рис. 1. Типичная конфигурация многосекционного лазера с тремя секциями. Здесь L — длина лазера.

Система бегущих волн состоит из уравнений бегущих волн

$$\partial_t \psi(t, z) = \sigma \partial_z \psi(t, z) + \beta(n(t), z) \psi(t, z) - i\kappa(z) \sigma_c \psi(t, z) + \rho(n(t), z) p(t, z), \quad (2.1)$$

$$\partial_t p(t, z) = (i\Omega_r(n(t), z) - \Gamma(n(t), z)) \cdot p(t, z) + \Gamma(n(t), z) \psi(t, z), \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} n_k(t) = I_k - \frac{n_k(t)}{\tau_k} - \frac{P}{l_k} \left(G_k(n_k(t)) - \rho_k(n_k(t)) \right) \int_{S_k} \psi(t, z)^* \psi(t, z) dz - \\ - \frac{P}{l_k} \rho_k(n_k(t)) \operatorname{Re} \left(\int_{S_k} \psi(t, z)^* p(t, z) dz \right), \quad k = 1 \dots m, \end{aligned} \quad (2.3)$$

неоднородных краевых условий

$$\psi_1(t, 0) = r_0 \psi_2(t, 0) + \alpha(t), \quad \psi_2(t, L) = r_L \psi_1(t, L) \quad (2.4)$$

и начальных условий

$$\psi(0, z) = \psi^0(z), \quad p(0, z) = p^0(z), \quad n(0) = n^0. \quad (2.5)$$

Вектор, эрмитово сопряженный к вектору ψ из \mathbb{C}^2 , обозначен в (2.3) через ψ^* . Мы определим соответствующие функциональные пространства и обсудим возможные подходы к решению данной задачи в разделе 3. Введенные выше величины имеют следующий физический смысл (см. таблицу 1 и рис. 1).

Лазер разделен на m секций S_k , каждая из которых имеет длину l_k и начинается в точке z_k , $k = 1, \dots, m$. Выберем такой масштаб, чтобы $l_1 = 1$, и положим $z_{m+1} = L$. Таким образом, $S_k = [z_k, z_{k+1}]$. Считаем, что все коэффициенты постоянны в каждой секции, т. е. если $z \in S_k$, то $\kappa(z) = \kappa_k$, $\Gamma(n, z) = \Gamma_k(n_k)$, $\beta(n, z) = \beta_k(n_k)$, $\rho(n, z) = \rho_k(n_k)$. Матрицы σ и σ_c имеют вид

$$\sigma = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_c = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Всюду в статье рассматривается модель, для которой $\beta(n, z) = \beta_k(n_k) \in \mathbb{C}$ ($z \in S_k$), поэтому

$$\beta_k(\nu) = d_k + (1 + i\alpha_{H,k}) G_k(\nu) - \rho_k(\nu),$$

где $d_k \in \mathbb{C}$, $\alpha_{H,k} \in \mathbb{R}$ и $\operatorname{Re} d_k < 0$. Секция S_k либо *пассивная* (тогда функции G_k и ρ_k тождественно равны нулю), либо *активная*. В последнем случае $G_k : (\underline{n}, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ есть гладкая¹ строго возрастающая функция, такая, что $G_k(1) = 0$, $G'_k(1) > 0$. При этом

$$\lim_{\nu \searrow \underline{n}} G_k(\nu) = -\infty, \quad \lim_{\nu \rightarrow \infty} G_k(\nu) = \infty, \quad \text{где } \underline{n} \leq 0.$$

Приведем типичные примеры функций G_k в активных секциях:

$$\begin{aligned} G_k(\nu) = \tilde{g}_k \log \nu \quad (\underline{n} = 0) \quad \text{или} \\ G_k(\nu) = \tilde{g}_k \cdot (\nu - 1) \quad (\underline{n} = -\infty). \end{aligned}$$

Если $G_k \neq 0$, то функция $\rho(n, z) = \rho_k(n_k)$ ограничена для $n_k < 1$. Более того, предположим, что $\rho_k, \Omega_{r,k}, \Gamma_k : (\underline{n}, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ — липшицевы функции и $\Gamma_k(\nu) > 1$.

¹Всюду в статье термин *гладкость* означает принадлежность пространству C^∞ .

	Порядок величины	Физический смысл
$\psi(t, z)$	\mathbb{C}^2	оптическое поле, амплитуды встречных волн
$i \cdot p(t, z)$	\mathbb{C}^2	нелинейная поляризация
$n_1(t)$	(\underline{n}, ∞)	пространственно усредненная плотность носителя в секции S_1
$\text{Im } \beta_k^0$	\mathbb{R}	расстройка частоты
$\text{Re } \beta_k^0$	$< 0, (-10, 0)$	скорость затухания поля, обусловленная внутренними потерями
α_H	$(0, 10)$	α -фактор (с противоположным знаком)
g_1	≈ 1	дифференциальное усиление в S_1
κ_k	$(-10, 10)$	вещественные коэффициенты связи для оптического поля ψ
ρ_k	$[0, 1)$	максимум кривой усиления
Γ_k	$O(10^2)$	полуширина кривой усиления на половине высоты
$\Omega_{r,k}$	$O(10)$	резонансная частота
I_k	$O(10^{-2})$	ток накачки
τ_k	$O(10^2)$	спонтанное время жизни носителей
P	$(0, \infty)$	масштаб для (ψ, p) (может быть выбран произвольным образом)
r_0, r_L	$\mathbb{C}, r_0 , r_L < 1$	коэффициенты фазеточного отражения
$\alpha(t)$	\mathbb{C}	амплитуда внешнего оптического сигнала при $z = 0$

ТАБЛИЦА 1. Порядки величин, входящих в (2.1)–(3.3), и их физический смысл. См. также [5, 18], где указана связь данных величин с первоначально использовавшимися физическими величинами и масштабы.

Коэффициенты r_0 и r_L в (2.4) комплексные и по модулю меньше 1. Неоднородность $\alpha(t)$ ограничена, но может иметь разрывы по t . Порядки и физический смысл переменных и коэффициентов указаны в таблице 1.

Введем эрмитову форму

$$g_k(\nu) \left[\begin{pmatrix} \psi \\ p \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \varphi \\ q \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{l_k} \int_{S_k} (\psi^*(z), p^*(z)) \begin{pmatrix} G_k(\nu) - \rho_k(\nu) & \frac{1}{2}\rho_k(\nu) \\ \frac{1}{2}\rho_k(\nu) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi(z) \\ q(z) \end{pmatrix} dz \quad (2.6)$$

и положим

$$\|\psi\|_k^2 = \int_{S_k} \psi^*(z)\psi(z)dz, \quad (2.7)$$

$$f_k(\nu, (\psi, p)) = I_k - \frac{\nu}{\tau_k} - P g_k(\nu) \left[\begin{pmatrix} \psi \\ p \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \psi \\ p \end{pmatrix} \right]$$

для $\nu \in [\underline{n}, \infty)$ и $\psi, p \in \mathbb{L}^2([0, L]; \mathbb{C}^2)$. В этих обозначениях (2.3) принимает вид

$$\frac{dn_k}{dt} = f_k(n_k, (\psi, p)) \text{ при } k = 1, \dots, m. \quad (2.8)$$

3. МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ МОДЕЛИ

В данном разделе мы изучим неоднородную начально-краевую задачу (2.1)–(2.4) как автономное нелинейное эволюционное уравнение

$$\frac{du}{dt} = Au + g(u), \quad u(0) = u_0, \quad (3.1)$$

где $u(t)$ — элемент гильбертова пространства V , оператор A — генератор C_0 -полугруппы $S(t)$, $g: U \subseteq V \rightarrow V$ — гладкая, локально липшицева в открытом множестве $U \subseteq V$ функция. Неоднородность из (2.4) включена в (3.1) как компонента элемента u .

3.1. Обозначения. Гильбертово пространство V определяется следующим образом

$$V := \mathbb{L}^2([0, L]; \mathbb{C}^4) \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{L}_\eta^2([0, \infty); \mathbb{C}), \quad (3.2)$$

где $\mathbb{L}_\eta^2([0, \infty); \mathbb{C})$ — пространство квадратично интегрируемых с весом функций. Скалярное произведение в $\mathbb{L}_\eta^2([0, \infty); \mathbb{C})$ задается формулой

$$(v, w)_\eta := \operatorname{Re} \int_0^\infty \bar{v}(x) \cdot w(x) (1 + x^2)^\eta dx.$$

Выберем число $\eta < -1/2$ так, чтобы пространство $\mathbb{L}^\infty([0, \infty); \mathbb{C})$ было непрерывно вложено в $\mathbb{L}_\eta^2([0, \infty); \mathbb{C})$. При определении векторного пространства V будем рассматривать комплексную плоскость как двумерную вещественную плоскость, тогда стандартное \mathbb{L}^2 -скалярное произведение $(\cdot, \cdot)_V$ в V будет дифференцируемо. Вектор $v \in V$ имеет следующие компоненты:

$$v = (\psi_1, \psi_2, p_1, p_2, n, a).$$

Пространственная переменная в функциях ψ и p обозначается через $z \in [0, L]$, тогда как пространственная переменная в функции a обозначается через $x \in [0, \infty)$. Гильбертово пространство $\mathbb{H}_\eta^1([0, \infty); \mathbb{C})$ со скалярным произведением

$$(v, w)_{1,\eta} := (v, w)_\eta + (\partial_x v, \partial_x w)_\eta$$

плотно и непрерывно вложено в $\mathbb{L}_\eta^2([0, \infty); \mathbb{C})$. Более того, его элементы являются непрерывными функциями [19]. Следовательно, гильбертовы пространства

$$\begin{aligned} W &:= \mathbb{H}^1([0, L]; \mathbb{C}^2) \times \mathbb{L}^2([0, L]; \mathbb{C}^2) \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{H}_\eta^1([0, \infty); \mathbb{C}), \\ W_{\text{BC}} &:= \{(\psi, p, n, a) \in W : \psi_1(0) = r_0 \psi_2(0) + a(0), \psi_2(L) = r_L \psi_1(L)\} \end{aligned}$$

плотно и непрерывно вложены в V . Линейные функционалы

$$\psi_1(0) - r_0 \psi_2(0) - a(0) \quad \text{и} \quad \psi_2(L) - r_L \psi_1(L)$$

непрерывны на W . Рассмотрим линейный оператор $A : W_{\text{BC}} \rightarrow V$, действующий по формуле

$$A(\psi_1, \psi_2, p, n, a) := (-\partial_z \psi_1, \partial_z \psi_2, 0, 0, \partial_x a).$$

Определения оператора A и пространства W_{BC} позволяют рассматривать неоднородность α в краевом условии (2.4) как граничное значение переменной a в точке 0. Рассмотрим открытое множество $U \subseteq V$:

$$U := \{(\psi, p, n, a) \in V : n_k > \underline{n} \text{ для } k = 1, \dots, m\}$$

и определим нелинейную функцию $g : U \rightarrow V$ по формуле

$$g(\psi, p, n, a) := \begin{pmatrix} \beta(n)\psi - i\kappa\sigma_c\psi + \rho(n)p \\ (i\Omega_r(n) - \Gamma(n))p + \Gamma(n)\psi \\ (f_k(n_k, (\psi, p)))_{k=1}^m \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.3)$$

Соответствующие коэффициенты в (2.1)–(2.3) задают гладкие отображения

$$\beta : (\underline{n}, \infty)^m \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{L}^2([0, L]; \mathbb{C}^2)) \quad \text{и} \quad \rho, \Omega_r, \Gamma : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{L}^2([0, L]; \mathbb{C}^2)).$$

Функция g имеет непрерывные производные всех порядков по всем своим аргументам, и ее производная Фреше ограничена в любом замкнутом ограниченном шаре $B \subset U$.

В дальнейшем существенную роль будут играть теория C_0 -полугрупп и понятие классического и слабого решений [12] уравнения (3.1).

Лемма 1. $A : W_{\text{BC}} \subset V \rightarrow V$ есть генератор C_0 -полугруппы $S(t)$ ограниченных операторов в пространстве V .

Неоднородная начально-краевая задача (2.1)–(2.5) и автономная эволюционная система (3.1) эквивалентны в следующем смысле. Предположим, что $\alpha \in \mathbb{H}^1([0, T]; \mathbb{C})$ в (2.4). Пусть функция $u = (\psi, p, n, a)$ — классическое решение системы (3.1). Тогда u удовлетворяет (2.1)–(2.2) и (2.5) в \mathbb{L}^2 и (2.3), (2.4) при каждом $t \in [0, T]$ в том и только в том случае, если $a^0|_{[0, T]} = \alpha$. С другой стороны, предположим, что (ψ, p, n) удовлетворяет (2.1)–(2.2) и (2.5) в \mathbb{L}^2 и (2.3), (2.4) при каждом $t \in [0, T]$. Тогда мы можем выбрать $a^0 \in \mathbb{H}_\eta^1([0, \infty); \mathbb{C})$, такое, что $a^0|_{[0, T]} = \alpha$. В результате получим, что

$$u(t) = (\psi(t), p(t), n(t), a^0(t + \cdot))$$

есть классическое решение уравнения (3.1) на $[0, T]$.

Слабые решения уравнения (3.1) являются естественными обобщениями классических решений задачи (2.1)–(2.4) на случай, когда краевые условия содержат негладкую компоненту $\alpha \in \mathbb{L}_\eta^2([0, \infty); \mathbb{C})$.

3.2. Глобальное существование и единственность решений. Чтобы доказать единственность и глобальное существование решений уравнения (3.1), рассмотрим так называемую укороченную задачу.

Для ограниченного шара $B \subset U$, замкнутого в V , выберем функцию $g_B : V \rightarrow V$, гладкую, глобально липшицеву и такую, что $g_B(u) = g(u)$ для всех $u \in B$. Это возможно, так как производная Фреше от g ограничена в B и скалярное произведение в V дифференцируемо по своим аргументам. Назовем задачу

$$\frac{du}{dt} = Au + g_B(u), \quad u(0) = u_0 \quad (3.4)$$

укороченной задачей для (3.1). Следующая лемма 2 вытекает из результатов работы [12].

Лемма 2 (глобальное существование решений укороченной задачи). *Укороченная задача (3.4) имеет единственное глобальное слабое решение $u(t)$ для любого $u_0 \in V$. Если $u_0 \in W_{BC}$, то $u(t)$ — классическое решение задачи (3.4).*

Следствие 3 (локальное существование). *Пусть $u_0 \in U$. Существует $t_{\text{loc}} > 0$, такое, что эволюционная задача (3.1) имеет единственное слабое решение $u(t)$ на интервале $[0, t_{\text{loc}}]$. Если $u_0 \in W_{BC} \cap U$, то $u(t)$ — классическое решение задачи (3.1) на $[0, t_{\text{loc}}]$.*

Для того чтобы перенести результаты леммы 2 на эволюционное уравнение (3.1), нам потребуется следующая априорная оценка решений укороченной задачи (3.4).

Лемма 4. *Пусть $T > 0$, $u_0 \in W_{BC} \cap U$. Если $\underline{\nu} > -\infty$, то предположим, что $I_k \tau_k > \underline{\nu}$ для всех $k = 1, \dots, m$. Тогда существует замкнутый ограниченный шар B , такой, что $B \subset U$ и решение $u(t)$ для B -укороченной задачи (3.4) с начальным значением u_0 остается в шаре B при всех $t \in [0, T]$.*

Более того, в силу особой структуры нелинейности g решение $u(t)$, имеющее начальное значение $u_0 \in W_{BC} \cap U$ и остающееся в ограниченном замкнутом шаре $B \subset U$ на $[0, T]$, есть классическое решение на всем интервале $[0, T]$.

Из леммы 4 вытекает следующее утверждение.

Теорема 5 (глобальное существование и единственность). *Пусть $T > 0$, выполняется включение $u_0 = (\psi^0, p^0, n^0, a^0) \in U$ и $\|a^0\|_{[0, T]} < \infty$. Если $\underline{\nu} > -\infty$, то предположим, что $I_k \tau_k > \underline{\nu}$ для всех $k = 1, \dots, m$. Тогда существует единственное слабое решение $u(t)$ задачи (3.1) на интервале $[0, T]$. Далее, если $u_0 \in W_{BC} \cap U$, то $u(t)$ — классическое решение задачи (3.1).*

Следствие 6 (глобальная ограниченность). *Пусть $u_0 = (\psi^0, p^0, n^0, a^0) \in U$ и $\|a^0\|_\infty < \infty$. Тогда существует константа C , такая, что $\|u(t)\|_V \leq C$.*

Следующее следствие немедленно вытекает из теоремы 5 и общей теории C_0 -полугрупп [12] (более подробно см. [17]).

Следствие 7 (гладкие полупотоки). *Нелинейное уравнение (3.1) определяет полупоток $S(t; u_0)$ при $t > 0$, сильно непрерывный по t и гладкий по u_0 и по всем параметрам.*

4. РЕДУЦИРОВАННАЯ СИСТЕМА

4.1. Введение малого параметра. Далее ограничимся изучением системы (2.1)–(2.3) с однородными краевыми условиями

$$\psi_1(t, 0) = r_0\psi_2(t, 0), \quad \psi_2(t, L) = r_L\psi_1(t, L). \quad (4.1)$$

Переформулируем задачу (2.1)–(2.3) так, чтобы можно было использовать ее особую структуру. Пространственно зависящая подсистема линейна по ψ и p и может быть записана в виде

$$\partial_t \begin{pmatrix} \psi \\ p \end{pmatrix} = H(n) \begin{pmatrix} \psi \\ p \end{pmatrix}, \quad (4.2)$$

где линейный оператор

$$H(n) = \begin{pmatrix} \sigma\partial_z + \beta(n) - i\kappa\sigma_c & \rho(n) \\ \Gamma(n) & i\Omega_r(n) - \Gamma(n) \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

действует из

$$Y := \{(\psi, p) \in \mathbb{H}^1([0, L]; \mathbb{C}^2) \times \mathbb{L}^2([0, L]; \mathbb{C}^2) : \psi \text{ удовлетворяет (4.1)}\}$$

в $X = \mathbb{L}^2([0, L]; \mathbb{C}^4)$. Оператор $H(n)$ генерирует C_0 -полугруппу $T_n(t)$, действующую в X . Можно доказать, что $T_n(t)$ дифференцируема для больших t (см. [10, 12]) в случае, когда $r_0r_1 = 0$. Коэффициенты κ , $\beta(n)$, $\Omega_r(n)$, $\Gamma(n)$ и $\rho(n)$ (при $n \in \mathbb{R}^m$) являются линейными операторами в $\mathbb{L}^2([0, L]; \mathbb{C}^2)$, определенными посредством соответствующих коэффициентов в (2.1), (2.2). Отображения $\beta, \rho, \Gamma, \Omega_r : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{L}^2([0, L]; \mathbb{C}^2))$ являются гладкими.

Заметим, что I_k и τ_k^{-1} в (2.7) принимают значения порядка 10^{-2} (см. таблицу 1). Следовательно, мы можем ввести малый параметр ε и положить $P = \varepsilon$ в (2.3); тогда (2.8) примет вид

$$\frac{dn_k}{dt} = f_k(n_k, E) = \varepsilon(F_k(n_k) - g_k(n_k)[E, E]) \quad (4.4)$$

для $E \in X$, где коэффициенты в $F_k(n_k) = \varepsilon^{-1}(I_k - n_k\tau_k^{-1})$ принимают значения порядка 1. Хотя мы не можем непосредственно менять ε , мы можем рассматривать его как параметр и перейти к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$, считая F_k фиксированным. При $\varepsilon = 0$ плотность носителей n стационарна, т. е. входит в линейную подсистему (4.2) в качестве параметра. Далее мы исследуем поведение этой линейной системы при больших значениях времени t , где для краткости аргумент n указываться не будет.

4.2. Спектральные свойства оператора $H(n)$. В данном пункте мы изучим спектр оператора $H(n)$, считая n параметром.

Вначале определим множество комплексных «резонансных частот»

$$\mathcal{W} := \{c \in \mathbb{C} : c = i\Omega_{r,k} - \Gamma_k \text{ по крайней мере для одного } k \in \{1, \dots, m\}\} \subset \mathbb{C}$$

и введем функцию $\chi : \mathbb{C} \setminus \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{L}^2([0, L]; \mathbb{C}^2))$ по формуле

$$\chi(\lambda) := \frac{\rho\Gamma}{\lambda - i\Omega_r + \Gamma} \in \mathcal{L}(\mathbb{L}^2([0, L]; \mathbb{C}^2)) \text{ для каждого } \lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{W}$$

(см. более подробно [5, 18]). Для $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{W}$ из (4.3) получаем: λ принадлежит резольвентному множеству оператора H тогда и только тогда, когда краевая задача

$$(\sigma\partial_z + \beta - i\kappa\sigma_c + \chi(\lambda) - \lambda)\varphi = 0 \quad \text{с краевыми условиями} \quad (4.1) \quad (4.5)$$

имеет лишь тривиальное решение $\varphi = 0$ в $\mathbb{H}^1([0, L]; \mathbb{C}^2)$. Матрица перехода, соответствующая (4.5), имеет вид

$$T_k(z, \lambda) = \frac{e^{-\gamma_k z}}{2\gamma_k} \begin{pmatrix} \gamma_k + \mu_k + e^{2\gamma_k z}(\gamma_k - \mu_k) & i\kappa_k(1 - e^{2\gamma_k z}) \\ -i\kappa_k(1 - e^{2\gamma_k z}) & \gamma_k - \mu_k + e^{2\gamma_k z}(\gamma_k + \mu_k) \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

для $z \in S_k$, где

$$\begin{aligned} \mu_k &= \lambda - \chi_k(\lambda) - \beta_k, \\ \gamma_k &= \sqrt{\mu_k^2 + \kappa_k^2} \end{aligned}$$

(см. [2,14]). Правая часть (4.6) не зависит от того, какая выбирается ветвь квадратного корня в γ_k , так как соответствующее выражение четно относительно γ_k . Обозначим общую матрицу перехода для (4.5) через $T(z_1, z_2; \lambda)$ для $z_1, z_2 \in [0, L]$. Функция

$$h(\lambda) = (r_L, -1) T(L, 0; \lambda) \begin{pmatrix} r_0 \\ 1 \end{pmatrix} = (r_L, -1) \prod_{k=m}^1 T_k(l_k; \lambda) \begin{pmatrix} r_0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (4.7)$$

заданная в $\mathbb{C} \setminus \mathcal{W}$, есть характеристическая функция оператора H , ее корни являются собственными значениями оператора H .

$$\mathcal{R} := \{\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{W} : h(\lambda) \neq 0\}$$

есть резольвентное множество. Следовательно, все $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{W}$ либо являются собственными значениями оператора H , либо принадлежат \mathcal{R} , т. е. отсутствует существенный (непрерывный или остаточный) спектр в $\mathbb{C} \setminus \mathcal{W}$. Заметим, что соотношение

$$\max \operatorname{Re} \mathcal{W} \ll -1$$

выполняется для физически правдоподобной совокупности параметров.

Следующая лемма дает приближенное значение верхней грани для вещественной части собственных значений.

Лемма 8. Пусть $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{W}$ принадлежит точечному спектру оператора H . Тогда λ имеет геометрическую кратность 1 и

$$\operatorname{Re} \lambda \leq \Lambda_u := \max_{k=1, \dots, m} \left\{ -\frac{\Gamma_k}{2}, \operatorname{Re} \beta_k + 2\rho_k \right\}.$$

Нам будет удобно рассматривать оператор H как возмущение оператора

$$H_0 = \begin{pmatrix} \sigma \partial_z + \beta & 0 \\ 0 & i\Omega_r - \Gamma \end{pmatrix},$$

заданного на $Y \subset X$ (см. также [14,15]). Спектр оператора H_0 состоит из \mathcal{W} и последовательности простых собственных значений

$$\lambda_j^0 := \frac{1}{L} \left[\sum_{k=1}^m \beta_k l_k + \frac{1}{2} \log(r_0 r_L) + j\pi i \right], \quad j \in \mathbb{Z}.$$

В следующей теореме выясняется, как свойства роста полугруппы $T(t)$ связаны со спектром оператора H .

Теорема 9. Пусть ξ_0 определяется по формуле

$$\xi_0 := \begin{cases} \max\{\operatorname{Re} \lambda_0^0, \max \operatorname{Re} \mathcal{W}\}, & \text{если } r_0 r_L \neq 0, \\ \max \operatorname{Re} \mathcal{W}, & \text{если } r_0 r_L = 0. \end{cases}$$

Для $\xi > \xi_0$ существует не более конечного числа собственных значений оператора H с конечной алгебраической кратностью в правой полуплоскости

$$\mathbb{C}_\xi := \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda \geq \xi\}.$$

Более того, пространство X раскладывается на два $T(t)$ -инвариантных подпространства

$$X = X_+ \oplus X_-,$$

где X_+ не более чем конечномерно и натянуто на обобщенные собственные векторы, соответствующие собственным значениям оператора H в \mathbb{C}_ξ . Существует константа M , такая, что сужение $T(t)$ на X_- ограничено и

$$\|T(t)|_{X_-}\| \leq M e^{\xi t} \quad (4.8)$$

в любой норме, эквивалентной норме пространства X .

Замечание. Собственные значения оператора H можно найти численно, решая комплексное уравнение $h(\lambda) = 0$. Собственные значения H_0 из $\mathbb{C} \setminus \mathcal{W}$ образуют последовательность λ_j^0 при $k = 0$, $\rho = 0$, $r_0^0 r_L^0 \neq 0$. Нули характеристической функции h могут быть получены продолжением по параметрическому пути $\theta\kappa$, $\theta\rho$, $r_0^0 + \theta(r_0 - r_0^0)$, $r_L^0 + \theta(r_L - r_L^0)$ для $\theta \in [0, 1]$.

4.3. Существование и свойства конечномерных центральных многообразий. Предыдущие результаты позволяют применить теоремы о существовании и свойствах нормально гиперболических инвариантных многообразий в банаховых пространствах [7–9] к изучению потока $S(t, \cdot)$, порожденного системой (4.2), (4.4) при выполнении следующего условия.

Предположение 10. *Предположим, что существуют число $\xi \in (\xi_0, 0)$ и простое связное компактное множество $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^m$, такие, что для всех $n \in \mathcal{K}$ спектр оператора $H(n)$ представим в виде следующего объединения*

$$\text{спес } H(n) = \sigma_c(n) \cup \sigma_s(n),$$

где

$$\text{Re } \sigma_c(n) = 0, \quad \text{Re } \sigma_s(n) < \xi < 0.$$

Согласно теореме 9 число элементов в $\sigma_c(n)$ конечно и, следовательно, постоянно в \mathcal{K} (учитывая их алгебраическую кратность). Обозначим это число через q . Далее, для каждого $\gamma \in [\xi, 0)$ существует ограниченное простое связное открытое множество $U_\gamma \supset \mathcal{K}$, такое, что указанное представление спектра $\text{спес } H(n)$ имеет место на U_γ :

$$\text{спес } H(n) = \sigma_c(n) \cup \sigma_s(n),$$

где для всех $n \in U_\gamma$

$$\text{Re } \sigma_c(n) > \gamma, \quad \text{Re } \sigma_s(n) < \xi.$$

Существуют спектральные проекторы оператора $H(n)$, а именно: $P_c(n)$ и $P_s(n) \in \mathcal{L}(X)$, соответствующие указанному представлению. Они корректно определены, единственны при всех $n \in U_\xi$ и зависят от n гладким образом. Определим соответствующие замкнутые инвариантные подпространства в X по формулам

$$\begin{aligned} X_c(n) &= \text{Im } P_c(n) = \ker P_s(n), \\ X_s(n) &= \text{Im } P_s(n) = \ker P_c(n). \end{aligned}$$

Размерность $X_c(n)$ равна q . Пусть

$$B(n) : \mathbb{C}^q \rightarrow X$$

есть базис в $X_c(n)$, зависящий от n гладким образом. $B(\cdot)$ корректно определен в U_ξ . Используя данные обозначения, мы можем сформулировать следующую теорему.

Теорема 11 (редуцирование системы). *Пусть $k > 2$ — произвольное целое число и $E_{\max} > 0$. Тогда существуют $\varepsilon_0 > 0$ и открытая окрестность $U \subset U_\xi$ множества \mathcal{K} , такие, что для множеств*

$$\begin{aligned} \mathcal{B} &:= \{(E_c, n) \in \mathbb{C}^q \times \mathbb{R}^m : \|E_c\| < bE_{\max} + 1, n \in U\} \subset \mathbb{C}^q \times \mathbb{R}^m, \\ \mathcal{N} &:= \{(E, n) \in X \times \mathbb{R}^m : \|E\| < E_{\max}, n \in \Upsilon\} \subset X \times \mathbb{R}^m, \end{aligned}$$

где

$$b := \max_{n \in \text{cl } U} \|B(n)^{-1} P_c(n)\|$$

и Υ — произвольное замкнутое подмножество в U , справедливо следующее утверждение. Для всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ существует многообразие \mathcal{C} класса C^k со следующими свойствами.

- i. (Инвариантность) \mathcal{C} является $S(t, \cdot)$ -инвариантным относительно \mathcal{N} .
- ii. (Представление) \mathcal{C} представимо в виде графика отображения

$$(E_c, n, \varepsilon) \in \mathcal{B} \times (0, \varepsilon_0) \rightarrow ([B(n) + \varepsilon \nu(E_c, n, \varepsilon)] E_c, n) \in X \times \mathbb{R}^m,$$

где

$$\nu : \mathcal{B} \times (0, \varepsilon_0) \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{C}^q; X)$$

по всем аргументам принадлежит классу C^{k-2} .

iii. (Экспоненциальное притяжение) Обозначим E -компоненту \mathcal{C} через

$$E_X(E_c, n, \varepsilon) = [B(n) + \varepsilon\nu(E_c, n, \varepsilon)]E_c \in X.$$

Пусть (E, n) таково, что

$$S(t; (E, n)) \in \mathcal{N}$$

для всех $t \geq 0$. Тогда существуют $(E_c, n_c) \in \mathcal{B}$, $M > 0$ и $t_c \geq 0$, такие, что

$$\|S(t + t_c; (E, n)) - S(t; (E_X(E_c, n_c, \varepsilon), n_c))\| \leq Me^{\varepsilon t} \quad (4.9)$$

для всех $t \geq 0$.

iv. (Поток) Значения $\nu(E_c, n, \varepsilon)E_c$ лежат в Y и их $P_c(n)$ -компонента равна 0 для всех $(E_c, n, \varepsilon) \in \mathcal{B} \times (0, \varepsilon_0)$. Поток на $\mathcal{C} \cap \mathcal{N}$ дифференцируем по t и определяется системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dE_c}{dt} &= [H_c(n) + \varepsilon a_1(E_c, n, \varepsilon) + \varepsilon^2 a_2(E_c, n, \varepsilon)\nu(E_c, n, \varepsilon)] E_c, \\ \frac{dn}{dt} &= \varepsilon F(E_c, n, \varepsilon), \end{aligned} \quad (4.10)$$

где

$$\begin{aligned} H_c(n) &= B(n)^{-1}H(n)P_c(n)B(n), \\ a_1(E_c, n, \varepsilon) &= -B(n)^{-1}P_c(n)\partial_n B(n)F(E_c, n, \varepsilon), \\ a_2(E_c, n, \varepsilon) &= B(n)^{-1}\partial_n P_c(n)F(E_c, n, \varepsilon)(Id - P_c(n)), \\ F(E_c, n, \varepsilon) &= (f_k(n_k) - g_k(n_k)[E_X(E_c, n_c, \varepsilon), E_X(E_c, n_c, \varepsilon)])_{k=1}^m. \end{aligned}$$

Система (4.10) симметрична относительно поворота $E_c \rightarrow E_c e^{i\varphi}$, и ν удовлетворяет соотношению

$$\nu(e^{i\varphi} E_c, n, \varepsilon) = \nu(E_c, n, \varepsilon)$$

для всех $\varphi \in [0, 2\pi)$.

5. МОДОВОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

График центрального многообразия входит в описание (4.10) потока на \mathcal{C} только в виде $O(\varepsilon^2)\nu$. Все остальные члены, возникающие в (4.10), аналитически выражаются как функции собственных значений оператора $H(n)$. Системы вида (4.10), в которых ν заменяется на 0, называются *модовыми приближениями*. Они имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{dE_c}{dt} &= [H_c(n) + \varepsilon a_1(E_c, n, \varepsilon)] E_c, \\ \frac{dn}{dt} &= \varepsilon F(E_c, n, \varepsilon), \end{aligned} \quad (5.1)$$

где $E_c \in \mathbb{C}^q$, $n \in \mathbb{R}^m$ и

$$\begin{aligned} H_c(n) &= B(n)^{-1}H(n)P_c(n)B(n), \\ a_1(E_c, n, \varepsilon) &= -B(n)^{-1}P_c(n)\partial_n B(n)F(E_c, n, \varepsilon), \\ F(E_c, n, \varepsilon) &= (f_k(n_k) - g_k(n_k)[B(n)E_c, B(n)E_c])_{k=1}^m. \end{aligned}$$

Эти модели представляют собой неявные системы обыкновенных дифференциальных уравнений, так как собственные значения оператора H заданы неявно как нули характеристической функции h оператора H . Модовые приближения оказываются чрезвычайно полезными при численном и аналитическом исследовании продольных эффектов в многосекционных полупроводниковых лазерах. Это связано с тем, что размерность системы (4.10) обычно мала (q , как правило, равно 1 или 2); см., например, [2–4, 6, 16, 21, 23, 24].

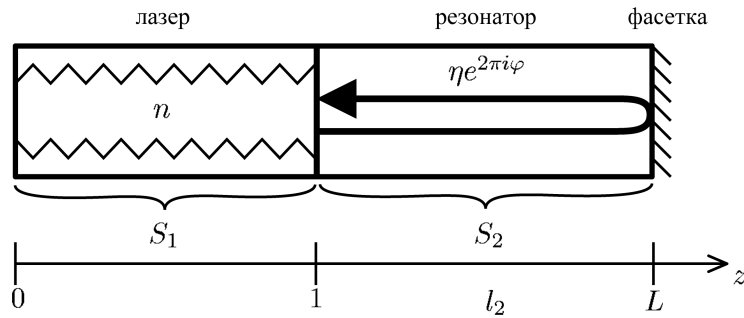


Рис. 2. Схема двухсекционного лазера при наличии обратной связи с запаздыванием. Секции имеют длины 220 мм и 250 мм.

5.1. Оптическая обратная связь с запаздыванием. Покажем, как используется система (5.1) в классическом эксперименте для лазера с одним стационарным режимом при наличии оптической обратной связи с запаздыванием [22].

Рассмотрим двухсекционный лазер, в котором S_1 — одномодовый лазер с распределенной обратной связью, а S_2 — пассивный волновод, обеспечивающий оптическую обратную связь с фасетки (см. рис. 2) и, следовательно, представляющий собой очень короткий оптический резонатор. В этом случае секция S_2 пассивна, т. е. G_2 и ρ_2 равны тождественно нулю. Таким образом, n_2 не входит в систему (2.1)–(2.4), и мы можем считать, что

$$n(t) = n_1(t)$$

есть скалярная функция. Наши основные бифуркационные параметры — это модуль η и фаза φ коэффициента отражения фасетки $r_L = \eta e^{2\pi i \varphi}$.

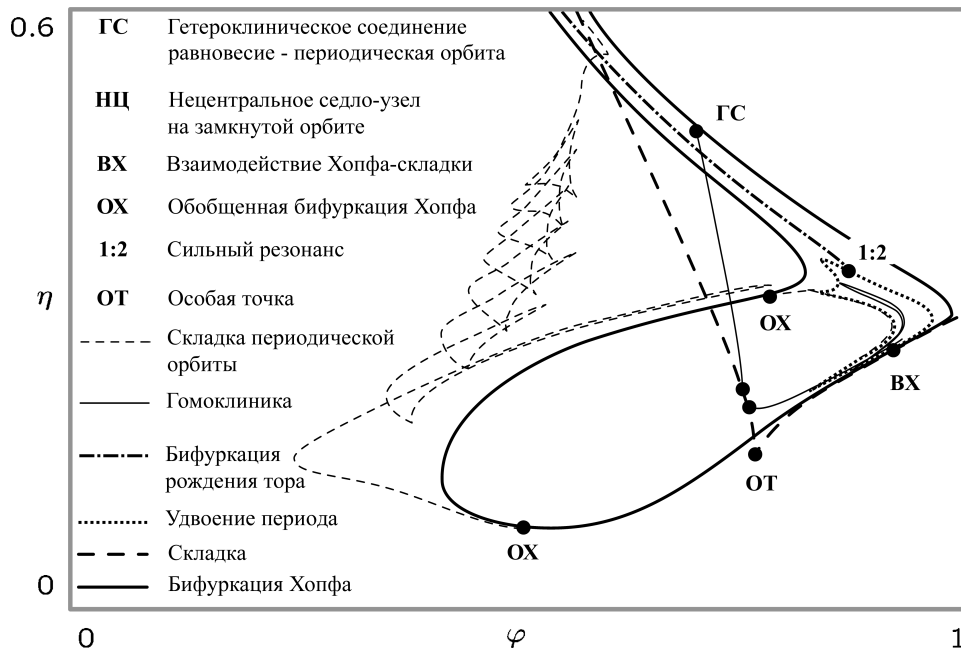


Рис. 3. Бифуркационная диаграмма в случае двухмодового приближения (5.1) (с $q = 2$) на плоскости параметров (φ, η) (см. [16], где указаны конкретные значения параметров).

Существуют параметры (φ_0, η_0) , при которых существует стационарное состояние

$$(E_c(t) = E_{c,0} e^{\lambda_1 t}, n(t) = n_0 = \text{const}),$$

такое, что λ_1 лежит на мнимой оси и имеет алгебраическую кратность 2, а все остальные собственные значения оператора $H(n_0)$ имеют отрицательные вещественные части. Оказывается, что

динамика системы (4.2), (4.4) описывается разворачиванием данного вырождения на значительной части плоскости параметров (φ, η) , т. е. мы имеем $q = 2$. Обозначим критические собственные значения оператора H вблизи вырождения через λ_1 и λ_2 , а соответствующие собственные векторы — через v_1 и v_2 (выбирая такой масштаб, что ψ -компонента $v_{1,2} = (r_0, 1)$). Далее, мы можем выбрать $[(v_1 - v_2)/(\lambda_1 - \lambda_2), (v_1 + v_2)/2]$ в качестве базиса B критического подпространства и соответствующие сопряженные векторы в качестве спектральных проекций $B^{-1}P_c$ в (5.1). Таким образом, система (5.1) имеет вещественную размерность 4 после редукции вращательной симметрии в E_c (см. более подробно [16]).

Численное продолжение по параметрам положения равновесия и периодических орбит редуцированной системы (соответствующей вращающимся волнам и модулированным вращающимся волнам в исходной системе) дает бифуркационную диаграмму, представленную на рис. 3.

Замечание. Диаграмма на рис. 3 неполна в силу сложной динамики вблизи точек бифуркаций (например, взаимодействия Хопфа, 1:2 резонанса, гомоклиники к седло-фокусу). Однако она описывает ряд явлений, представляющих значительный интерес для приложений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Avrutin E. A., Marsh J. H., Arnold J. M.* Modelling of semiconductor laser structures for passive harmonic mode locking at terahertz frequencies// Int. J. Optoelectronics. — 1995. — 10. — С. 427–432
2. *Bandelow U.* Theorie longitudinaler Effekte in 1.55 μm Mehrsektions — DFB-Laserdioden// PhD thesis, Humboldt-Universität, Berlin, 1994
3. *Bandelow U., Radziunas M., Tronciu V., Wünsche H.-J., Henneberger F.* Tailoring the dynamics of diode lasers by dispersive reflectors// Proc. SPIE. — 2000. — 3944. — С. 536–545
4. *Bandelow U., Recke L., Sandstede B.* Frequency regions for forced locking of self-pulsating multi-section DFB lasers// Opt. Comm. — 1998. — 147. — С. 212–218
5. *Bandelow U., Wolfrum M., Radziunas M., Sieber J.* Impact of gain dispersion on the spatio-temporal dynamics of multisection lasers// IEEE J. Quant. El. — 2001. — 37. — С. 183–189
6. *Bandelow U., Wünsche H. J., Sartorius B., Möhrle M.* Dispersive self Q-switching in DFB-lasers: Theory versus experiment// IEEE J. Selected Topics Quant. El. — 1997. — 3. — С. 270–278
7. *Bates P. W., Lu K., Zeng C.* Existence and persistence of invariant manifolds for semiflows in Banach spaces// Mem. Am. Math. Soc. — 1998. — 135
8. *Bates P. W., Lu K., Zeng C.* Persistence of overflowing manifolds for semiflow// Commun. Pure Appl. Math. — 1999. — 52
9. *Bates P. W., Lu K., Zeng C.* Invariant foliations near normally hyperbolic invariant manifolds for semiflows// Trans. Am. Math. Soc. — 2000. — 352. — С. 4641–4676
10. *Diekmann O., van Gils S., Lunel S. M. V., Walther H.-O.* Delay equations// Appl. Math. Sci., New York: Springer-Verlag, 1995.
11. *Marcenac D.* Fundamentals of laser modelling// PhD thesis, University of Cambridge, 1993
12. *Pazy A.* Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations. — New York: Springer-Verlag, 1983
13. *Radziunas M., Wünsche H.-J., Sartorius B., Brox O., Hoffmann D., Schneider K., Marcenac D.* Modeling self-pulsating DFB lasers with integrated phase tuning section// IEEE J. Quant. El. — 2000. — 36. — С. 1026–1034
14. *Recke L., Schneider K., Strygin V.* Spectral properties of coupled wave equations// Z. Angew. Math. Phys. — 1999. — 50. — С. 923–933
15. *Rehberg J., Wünsche H.-J., Bandelow U., Wenzel H.* Spectral properties of a system describing fast pulsating DFB lasers// Z. Angew. Math. Mech. — 1997. — 77. — С. 75–77
16. *Sieber J.* Numerical bifurcation analysis for multi-section semiconductor lasers// SIAM J. Appl. Dyn. Sys. — 2002. — 1, № 2. — С. 248–270
17. *Sieber J.* Longtime behavior of the traveling-wave model for semiconductor lasers// Preprint 743, WIAS, Submitted to SIAM J. Appl. Dyn. Sys., 2002
18. *Sieber J., Bandelow U., Wenzel H., Wolfrum M., Wünsche H.-J.* Travelling wave equations for semiconductor lasers with gain dispersion// Preprint 459, WIAS, 1998.
19. *Triebel H.* Interpolation theory, function spaces, differential operators. — Amsterdam–New-York: N.-Holland, 1978
20. *Tromborg B., Lassen H. E., Olesen H.* Travelling wave analysis of semiconductor lasers// IEEE J. Quant. El. — 1994. — 30. — С. 939–956

21. *Tronciu V., Wünsche H.-J., Sieber J., Schneider K., Henneberger F.* Dynamics of single mode semiconductor lasers with passive dispersive reflectors// *Opt. Comm.* — 2000. — 182. — С. 221–228
22. *van Tartwijk G. H. M., Agrawal G. P.* Laser instabilities: a modern perspective// *Prog. Quant. El.* — 1998. — 22. — С. 43–122
23. *Wenzel H., Bandelow U., Wünsche H.-J., Rehberg J.* Mechanisms of fast self pulsations in two-section DFB lasers// *IEEE J. Quant. El.* — 1996. — 32. — С. 69–79
24. *Wünsche H. J., Brox O., Radziunas M., Henneberger F.* Excitability of a semiconductor laser by a two-mode homoclinic bifurcation// *Phys. Rev. Lett.* — 2002. — 88

Jan Sieber

Weierstrass Institute for Applied Analysis and Stochastics,
D-10117 Berlin, Mohrenstr. 39, Germany

E-mail: sieber@wias-berlin.de

Lutz Recke

Institute of Mathematics, Humboldt University of Berlin,
Unter den Linden 6, D-10099 Berlin, Germany

E-mail: recke@mathematik.hu-berlin.de

Klaus R. Schneider

Weierstrass Institute for Applied Analysis and Stochastics,
D-10117 Berlin, Mohrenstr. 39, Germany

E-mail: schneider@wias-berlin.de