O CUMPRIMENTO DO POSTULADO DE RELATIVIDADE NA MECÂNICA CLÁSSICA - UMA TRADUÇÃO COMENTADA DE UM TEXTO DE ERWIN SCHRÖDINGER SOBRE O PRINCÍPIO DE MACH

A. L. XAVIER Jr. e A. K. T. ASSIS

Resumo - Apresentamos uma tradução comentada de um importante artigo de Erwin Schrödinger sobre o princípio de Mach: Annalen der Physik, Volume 77, páginas 325-336 (1925), Die Erfüllbarkeit der Relativitätsforderung in der klassischen Mechanik.

Abstract - We present a commented translation to Portuguese of an important article by Erwin Schrödinger on Mach's principle: Annalen der Physik, Volume 77, pp. 325-336 (1925), Die Erfüllbarkeit der Relativitätsforderung in der Klassischen Mechanik

1 Introdução

Esta é a primeira tradução para o português de um trabalho fundamental do físico austríaco Erwin Schrödinger (1887-1961) sobre o princípio de Mach. A tradução a partir do original em alemão foi feita por A. L. X. Jr. A introdução e as notas são de A. K. T. A.

Isaac Newton (1642-1727) publicou o *Principia* em 1687. Lá apresentou suas famosas leis do movimento, a lei da gravitação universal e os conceitos de espaço, tempo e movimentos absolutos. Estes conceitos de espaço e tempo absolutos foram criticados por Leibniz (1646-1716), Berkeley (1685-1753) e especialmente por Ernst Mach (1838-1916). De acordo com estes autores só tem sentido empírico falar de movimento de um corpo em relação a outro corpo, e não em relação ao espaço vazio.

Mach publicou seu livro mais importante, *A Ciência da Mecânica*, em 1883. Este livro influenciou fortemente a Einstein na formulação da teoria da relatividade geral, mas depois se viu que esta teoria não implementava plenamente as idéias de Mach. É isto o que Schrödinger tenta fazer neste artigo, seguindo um caminho diferente do de Einstein. O que Schrödinger vai chamar aqui de postulado de relatividade ou de princípio de Mach é a idéia de que as energias de interação, inclusive a energia cinética, devem depender apenas das distâncias entre as partículas e das derivadas temporais destas distâncias: r, $\dot{r} = dr/dt$, etc.

Há duas maneiras principais de implementar matematicamente o princípio de Mach (ver A. K, T. Assis, *Foundations of Physics Letters*, v. 2, p. 301-318 (1989), "On Mach's principle"). A primeira é dizer que a somatória de todas as forças atuando em qualquer corpo é sempre nula, em todos os sistemas de referência (mesmo quando o corpo está em movimento e acelerado), e derivar as forças inerciais ($-m\vec{a}$, a força centrífuga, de Coriolis, etc.) a partir de uma interação gravitacional do corpo teste com o universo distante (as galáxias, como dizemos hoje em dia, ou as estrelas fixas, como diziam Mach e Schrödinger). A outra é dizer que a soma de todas as energias de interação de qualquer corpo é uma constante e derivar a energia cinética como uma energia de interação gravitacional do corpo teste com o universo distante. É este segundo procedimento que vai ser utilizado por Schödinger neste artigo.

Em particular ele vai usar como base de seu trabalho uma energia potencial de interação gravitacional do tipo

$$W = -G\frac{m_1 m_2}{r}(1 - 3\frac{\dot{r}^2}{c^2}).$$

Nesta expressão $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11} m^3 / kgs$ é a constante gravitacional Newtoniana, por ele representada por k, m_1 e m_2 são as massas gravitacionais dos corpos 1 e 2 separados pela distância $r = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|, \dot{r} = dr/dt$ e $c = 3 \cdot 10^8 m/s$. Ao integrar essa expressão para um corpo teste interagindo com o universo distante Schrödinger obtém a energia cinética $mv^2/2$ Como só começou com massas gravitacionais, a massa m que aparece nesta última expressão já é a massa gravitacional do corpo teste. Com isto explica automaticamente o princípio de equivalência, já que na energia cinética da mecânica clássica esta massa é a massa inercial do corpo teste, que conceitualmente não tem nenhuma relação com a massa gravitacional, embora experimentalmente se verifique que as duas são proporcionais ou iguais. A velocidade que aparece na expressão da energia cinética para Schrödinger é a velocidade do corpo teste em relação ao referencial das estrelas fixas, ou seja, em relação ao referencial no qual as estrelas como um todo estão paradas ou apenas com um movimento radial, sem translação ou rotação do conjunto como um todo. Sabe-se que a mecânica clássica funciona muito bem neste referencial, ou seja, sem a necessidade da introdução das forças de Coriolis ou centrífuga, mas não havia explicação para isto classicamente. Com este modelo de Schrödinger a explicação surge naturalmente.

Para mim o mais curioso em todo o trabalho é que Schrödinger afirma que chegou nesta expressão modificada para a energia potencial "heuristicamente". O significado da palavra heurística é o método analítico para o descobrimento de verdades científicas, ou seja, o método de resolver problemas por raciocínio indutivo, avaliando a experiência passada e descobrindo a solução por tentativa e erro. Isto é, Schrödinger chegou nesta energia potencial por conta própria. Sem que ele soubesse uma energia potencial análoga já havia sido proposta quase 80 anos antes no eletromagnetismo por Wilhelm Weber, em 1848. Sua energia potencial entre as cargas q_1 e q_2, que é uma generalização da de Coulomb, é dada por

$$W = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}(1 - \frac{\dot{r}^2}{2c^2}).$$

Nesta expressão $\varepsilon_0 = 8{,}85.10^{-12} C^2/Nm^2$ é a permissividade do vácuo. Weber conseguiu derivar as leis de Gauss, Faraday e Ampère a partir de sua lei. Para uma discussão detalhada do trabalho de Weber ver: A. K. T. Assis, *Revista da Sociedade Brasileira de História da Ciência*, v. 5, p. 53-59, 1991, "Wilhelm Edouard Weber (1804-1891), Sua vida e sua obra;" A. K. T. Assis, *Revista da Sociedade Brasileira de História da Ciência*, v. 7, p. 53-76, 1992, "Teorias de ação a distância - Uma tradução comentada de um texto de James Clerk Maxwell".

Weber não trabalhou apenas com eletromagnetismo, mas propôs a mesma lei para a gravitação, e esta idéia também havia sido proposta por Holzmuller, Tisserand e alguns outros na década de 1870. Paul Gerber chegou a uma lei análoga para a gravitação em 1898, e seu trabalho é citado por Mach. Embora nenhum destes autores aplicasse a lei de Weber para a gravitação para implementar o princípio de Mach, isto foi feito em um trabalho similar ao de Schrödinger por Reissner em 1814 e 1815, novamente sem citar a lei de Weber (H. Reissner, *Physikalishe Zeitschrift*, v.15, p. 371-375, 1914, "*Über die Relativität der Beschleunigungen in der Mechanik*;" idem, v.16, p. 179-185, 1915, "Über eine Möglichkeit die Gravitation als unmittelbare Folge der Relativität der Trägheit abzuleiten." É estranho que Schrödinger, sendo de língua alemã como Weber, não soubesse ou não citasse um trabalho que teve uma repercussão tão grande como o de Weber e nem citasse nenhum destes outros autores.

Este é o último artigo de Schrödinger antes de ele desenvolver e publicar seus trabalhos fundamentais de mecânica quântica (equação de Schrödinger, resolução do átomo de hidrogênio, etc.). Talvez seja este o motivo pelo qual não deu muita continuidade ao artigo que está sendo traduzido aqui.

2 Tradução

É bem conhecida a objeção levantada por E. Mach [1] contra a mecânica de partículas sujeitas a potenciais centrais, cujos fundamentos foram melhor apresentados por L.Boltzmann [2]. Tal objeção diz que a mecânica do ponto de vista de seus fundamentos, não satisfaz ao relevante postulado de relatividade. As leis da mecânica não valem para quaisquer sistemas de coordenadas em movimento, mas apenas para um grupo de sistemas que se movem reciprocamente em movimento translacional uniforme. Empiricamente, mostra-se que tais sistemas têm eixos aproximadamente em repouso ou em movimento translacional uniforme em relação às estrelas fixas, mas os fundamentos da mecânica clássica não dão nenhuma explicação para isto. (Nota 1)

A teoria da relatividade geral também não satisfaz, em sua forma original [3], ao postulado de Mach, como logo se viu (Nota 2). Após a derivação do movimento secular do periélio de mercúrio, que se mostrou em espantosa concordância com a experiência, qualquer pessoa ingênua pode se perguntar: Em relação a que se dá, de acordo com a teoria, o movimento da elipse, o qual, de acordo com a experiência, se dá em relação ao sistema aproximado das estrelas fixas?

Tem-se como resposta que a teoria exige tal movimento em relação a um sistema de coordenadas que satisfaz, no infinito, a determinadas condições de fronteira. O vínculo entre estas condições e a presença das estrelas fixas não é, de nenhuma maneira, claro, já que as estrelas não são levadas em conta nos cálculos.

O tratamento destas dificuldades é feito pela teoria cosmológica que postula um universo espacialmente fechado, evitando, assim talvez, condições de fronteira. Pelas dificuldades conceituais que esta teoria cosmológica ainda possui [4] e não pelas complicações matemáticas desta teoria, a solução de questões verdadeiramente fundamentais, que parecem evidentes à formação em ciência natural, nos parece conduzir a uma situação tal que não seja simples se obter uma visão clara e concisa da realidade. Não duvido que, quando essa resposta for encontrada satisfazendo à teoria, ela não só satisfará plenamente, mas poderá ser colocada em uma forma que possibilite uma visão completa da realidade em outros sentidos. Do ponto de vista atual, não é sem sentido se perguntar se o princípio de Mach não possa ser tornado válido por uma modificação na teoria clássica e se a preponderância do sistema inercial das estrelas fixas não possa ser compreendida de uma maneira simples [5].

A expressão para a energia potencial na mecânica de partículas, em especial o potencial de Newton, satisfaz, sem outras conseqüências, o princípio de Mach, já que ele só depende das distâncias dos corpos e não de sua posição absoluta no espaço. Pode-se, portanto, manter essa expressão, já que ela é aplicável do ponto de vista do postulado. Talvez ela seja uma primeira aproximação para uma lei da natureza algo mais complicada. Por outro lado, tem-se também a energia cinética. Ela é, de acordo com a mecânica clássica, determinada pelo movimento absoluto no espaço, enquanto que, para partículas pontuais, somente movimentos, distâncias e variações de distâncias relativas podem ser observadas.

Pode-se perguntar se talvez não fosse possível que a energia cinética, assim como a potencial, dependesse não apenas de uma partícula, mas da energia de interação das duas massas, e, assim sendo, da distância e velocidade relativa das duas partículas. De todas as possíveis expressões para essa energia, escolhemos heuristicamente a que satisfaz às seguintes exigências:

---

1 . MACH, E. Die *Mechanik in ihrer Entwicklung*. Leipzig, F. A. Brockhalus, 3. ed. 1897. Ver especialmente a seção II.6.

2 BÖLTZMANN, L. *Vorlesungen über die Prinzipe der Mechanik*. Leipzig J. A. Barth, 1897.

3 EINSTEIN, A. *Ann. D. Phys*. n. 49, p. 769, 1916

4 WEYL, H. Raum, Zeit, Materie. 5. ed. §39. - Berlin, J. Springer. 1923. Ver também o artigo "Massenträgheit und Kosmos" do mesmo autor no 12° ano, (1924) em "*Naturwissenschaften*".

5 A resposta a essa questão já foi apresentada por Mach na sua lei de inércia. Essa apresentação teve, não obstante, pouco impacto, já que Mach tomou uma interação de inércia independente da distância (ver artigo já citado, p.. 228 e seguintes).

1.A energia cinética como energia de interação deve depender das massas e distâncias das partículas da mesma maneira que o potencial de Newton;

2.Deve ser proporcional ao quadrado da velocidade de variação da distância.

Para a energia de interação total de duas massas pontuais, μ e μ', à distância r, isso resulta na expressão

$$W = \gamma \frac{\mu\mu'\dot{r}^2}{r} - \frac{\mu\mu'}{r}. \tag{1}$$

As massas são aqui, dadas de tal forma que a constante gravitacional seja igual a 1. A constante indeterminada γ tem dimensão do recíproco de uma velocidade quadrática. Como ela deve ser universal, esperamos que se trate, a menos de um fator numérico, da velocidade da luz e veremos que ela pode ser reduzida a um fator numérico quando escolhemos o segundo-luz como unidade de tempo. Posteriormente, mostraremos esse fator é igual a 3.

Agora, tomemos uma massa pontual μ nas proximidades do centro de uma esfera oca de raio R, com densidade de massa σ uniforme. Denotamos todas as coordenadas em relação ao sistema de repouso da esfera. Nesse sistema a partícula se move com coordenadas polares ρ, θ e φ. A distância r da partícula ao elemento de superfície é dada por

$$\left.\begin{aligned} r^2 = R^2 + \rho^2 - R\rho\cos(R\rho) \\ R^2 + \rho^2 - 2R\rho[\cos\theta\cos\theta' \\ + \sin\theta\sin\theta'\cos(\varphi - \varphi')]. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Tomemos (1) como a energia potencial total em cada ponto. Por diferenciação de (2) temos

$$\left.\begin{aligned} r\dot{r} = \rho\dot{\rho} - R\dot{\rho}[\cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\varphi - \varphi')] \\ - R\rho[-\sin\theta\cos\theta'\dot{\theta} + \cos\theta\sin\theta'\cos(\varphi - \varphi')\dot{\theta} \\ - \sin\theta\sin\theta'\sin(\varphi - \varphi')\dot{\varphi}]. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Como o sistema de coordenadas é de orientação arbitrária, é conveniente escolher $\theta = 0$. A seguir, calcularemos os termos principais que resultam de $\rho << R$. Com isso desprezamos os termos multiplicados por ρ em relação aos multiplicados por $\dot{\theta}$ ou $\dot{\varphi}$. Nessa aproximação, temos $r = R$. Isso resulta

$$\dot{r} = -\dot{\rho}\cos\theta' - \rho\dot{\theta}\sin\theta'\cos(\varphi - \varphi'). \tag{4}$$

Com auxílio de (1)

$$\left.\begin{aligned} W &= \frac{\gamma\mu\sigma R^2}{R}\int_0^{2\pi} d\varphi'\int_0^{\pi}\sin\theta' d\theta'[\dot\rho^2\cos^2\theta' \\ &\quad + 2\rho\dot\rho\dot\theta\sin\theta'\cos(\varphi-\varphi') + \rho^2\dot\theta^2\sin^2\theta'\cos^2(\varphi-\varphi')] \\ &= \frac{4\pi\gamma\mu\sigma R}{3}\left(\dot\rho^2+\rho^2\dot\theta^2\right). \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Que é exatamente o valor da energia cinética dado pela mecânica clássica desde que a massa m de nossa partícula (em gramas) seja dada por

$$m = \frac{8\pi\gamma\sigma R}{3}\mu. \tag{6}$$

Visto que, segundo a lei de energia potencial

$$m = \frac{\mu}{\sqrt{k}}, \tag{7}$$

onde k é a constante gravitacional usual, temos

$$\frac{1}{\sqrt{k}} = \frac{8\pi\gamma\sigma R}{3}. \tag{8}$$

Ou, se denotarmos para σ a densidade superficial usual s,

$$s = \frac{\sigma}{\sqrt{k}}, \tag{9}$$

temos

$$\frac{4\pi s R^2}{R} = \frac{3}{2k\gamma}. \tag{10}$$

Esta é uma relação sobre a qual ainda teremos algo a comentar. (Nota 3)
Expressando as massas em gramas, a energia de interação total é

$$W = \frac{\gamma kmm'}{r}\dot{r}^2 - \frac{kmm'}{r}. \qquad (1')$$

Se uma massa m (planeta) move-se nas redondezas de uma massa grande m' (sol), devemos levar em consideração além da energia cinética (5) em relação ao "horizonte de massa", a energia potencial e energia cinética (1') de m em relação a m'. Obtemos como energia total do "problema de um corpo"

$$W = \left(\frac{m}{2} + \frac{\gamma kmm'}{r}\right)\dot{r}^2 + \frac{m}{2}r^2\dot{\varphi}^2 - \frac{kmm'}{r}. \qquad (11)$$

A presença do sol tem o efeito de aumentar a interação gravitacional resultando no fato de que a inércia "radial" do planeta ser algo menor do que a inércia "tangencial" (Nota 4). Pela aplicação da lei das áreas, uma pequena variação resulta

$$r^2\dot{\varphi}^2 = f, \qquad (12)$$

e com a substituição

$$r^{-1} = \xi \qquad (13)$$

obtemos, como é de costume, pela eliminação do tempo de (11) e (12):

$$(1 + 2\gamma km'\xi)\left(\frac{d\xi}{d\varphi}\right)^2 + \xi^2 - \frac{2km'}{f^2}\xi - \frac{2W}{mf^2} = 0. \qquad (14)$$

Com

$$\xi = n + \frac{km'}{f^2}, C = \frac{2W}{mf^2} + \frac{k^2m'^2}{f^4} \qquad (15)$$

vem

$$d\varphi = \frac{d\eta\sqrt{1+\frac{2\gamma k^2 m'^2}{f^2}+2\gamma k m'\eta}}{\sqrt{C-\eta^2}} \tag{16}$$

que difere da forma ordinária pela presença da raiz no numerador. Concluímos que, com a aplicação de às órbitas dos planetas, existe uma pequena correção no movimento, caso γ seja da ordem recíproca do quadrado da velocidade da luz. Podemos ficar com a aproximação

$$\varphi\left(1+\frac{\gamma k^2 m'^2}{f^2}\right)\arcsin\eta - \gamma k m'\sqrt{C-\eta^2} + \text{const.} \tag{17}$$

Enquanto o segundo termo à direita representa uma perturbação periódica insignificante, o primeiro termo representa uma precessão do periélio no montante

$$\Delta = \frac{2\pi\gamma k^2 m'^2}{f^2} \tag{18}$$

por revolução, no sentido da revolução (φ compreende o ângulo $2\pi + \Delta$, e r retorna desde η ao mesmo valor segundo a mesma fase). Pelas relações expostas

$$km' = \frac{4\pi^2 a^3}{\tau^2}, \quad f = \frac{2\pi ab}{\tau}, \tag{19}$$

portanto,

$$\frac{k^2 m'^2}{f^2} = \frac{4\pi^2 a^4}{b^2\tau^2} = \frac{4\pi^2 a^2}{\tau^2\left(1-\xi^2\right)}$$

(τ, a, b, ε são o período de revolução, semi-eixo maior, menor e excentricidade da elipse, respectivamente). Isso resulta

$$\Delta = \frac{8\pi^3\gamma a^2}{r^2\left(1-\xi^2\right)} \tag{20}$$

Obtemos, assim, uma concordância com a precessão do periélio obtida pela teoria da relatividade[6], que para mercúrio está em concordância com a experiência, desde que (Nota 5)

$$\gamma = \frac{3}{c^2}. \tag{21}$$

Assim, a expressão (1) tem a forma mais específica

$$W = \frac{3\mu\mu'\dot{r}^2}{r} - \frac{\mu\mu'}{r}, \tag{1''}$$

quando o tempo e a massa são medidos de tal forma que a velocidade da luz e a constante gravitacionais são iguais a 1. De (10) temos

$$\frac{4\pi s R^2}{R} = \frac{c^2}{2k} = 6{,}7 \cdot 10^{27} c.g.s. \tag{10}$$

Pensemos em um "horizonte de massa" constituído de partículas com uma determinada distribuição de velocidades medidas em relação a um sistema de coordenadas convenientemente escolhido e que não são grandes em relação ao sistema do ponto médio. O resultado (5) não se modifica em relação ao resultado obtido no sistema de coordenadas em relação ao qual o horizonte de massa está em repouso. Também aparece um termo adicional originário da distribuição radial de velocidades que não tem influência sobre o movimento.

Após esse primeiro raciocínio, está claro que devemos substituir a distribuição bidimensional do horizonte de massa por uma distribuição espacial esfero-simétrica em relação ao ponto de observação, distribuição essa cujas camadas internas (localizadas a distâncias pequenas comparadas a R- para se justificar a aproximação feita acima) tenham uma contribuição desprezível à interação de inércia total. Seja d a densidade espacial da distribuição em g/cm^3, R o raio externo de forma que no lugar de (10') temos

$$\int_0^R \frac{4\pi\rho^2 d}{\rho} d\rho = 2\pi R^2 d = \frac{c^2}{2k} = 6{,}7 \cdot 10^{27} c.g.s., \tag{10''}$$

onde mantivemos d constante para as regiões internas a R. Esse resultado notável indica que o potencial (negativo) de todas as massas na região de observação, calculado com a *constante gravitacional local*, deve ser igual a meio quadrado da velocidade da luz.

Uma avaliação grosseira da integral em (10'') para as massas de nosso sistema determina o valor 10^{16} c.g.s.. Para isso admite-se que uma esfera de $R = 200$ *parsec* (1 *parsec* $= 3{,}09 \cdot 10^{18}$ *cm*) seja preenchida uniformemente com estrelas do tipo do sol e que um raio de 5 *parsec* corresponda a 30 de tais estrelas. Isso resulta numa fração muito pequena de interação de inércia sobre a terra e sobre o sistema solar proveniente de nosso sistema galáctico (Nota 6). Isso constitui, em vista da legitimidade da

6 A. Einstein, ver artigo citado anteriormente, última página.

apresentação aqui desenvolvida, um resultado muito feliz. Fosse a ordem de grandezas das relações um pouco diferente, seria possível explicar as mínimas anisotropias na inércia terrestre e dos planetas. Uma distribuição de massa como a gerada pelas estrelas conhecidas deve fazer com que um corpo tenha uma interação de inércia maior no plano galáctico do que perpendicular a este. Deve-se também levar em consideração o fato de que não nos encontramos no centro dessa distribuição de massa. A relação de grandezas apresentada acima parece a mim carregar a anisotropia de inércia resultante do posicionamento assimétrico das massas em nosso sistema galáctico mesmo dentro dos limites das observações astronômicas. Pode-se avaliar isso *grosso modo* por comparação com a bem demonstrável anisotropia de massa de mercúrio.

Surge, porém, contra o que foi dito acima, a questão sobre como nossos sistemas inerciais podem estar ligados em relação ao nosso sistema estelar (ou este em relação àqueles), se aqueles sistemas não estão "atados" simplesmente a este sistema estelar, mas em relação as massas estelares muito mais distantes. O motivo, ou melhor dizendo, a situação é devida a nossa suposição muito ingênua de que, empiricamente, só velocidades estelares relativas pequenas importam, a saber, aquelas que são pequenas em relação à velocidade da luz. Nossa lei (1") não fornece nenhuma explicação para isso.

Por outro lado, a observação do aumento da inércia (pelo desvio na trajetória de elétrons) deve ser aplicada à mecânica de nosso sistema solar, situação que se apresenta de um modo muito natural. As pesquisas mostram que devemos considerar (1") apenas como uma aproximação para pequenas velocidades, e, para grandes velocidades, a saber $\dot{r}$ comparável à unidade, necessitamos fazer uma correção. Consideremos a fórmula da energia "relativística" como uma expressão empírica

$$\text{En. cinética} = mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}-1\right), \tag{22}$$

podemos, então fazer uma modificação em (1") que leva a (22) para velocidades arbitrárias. Estabelecendo-se (Nota 7)

$$W=\frac{\mu\mu'}{R}\left(\frac{2}{(1-\dot{r}^2)^{3/2}}-3\right); \tag{1'''}$$

substituindo o valor (4) para $\dot{r}$ e seguindo o cálculo que leva a (5) (omitindo-se o segundo termo entre parênteses em (1''') que resulta em uma constante) temos

$$W=\frac{2\mu\sigma R^2}{R}\int_0^{2\pi}d\varphi'\int_0^{\pi}\frac{\sin\theta' d\theta'}{\left(1-\left[\dot{\rho}\cos\theta'+\rho\dot{\theta}\sin\theta'\cos(\varphi'-\varphi)\right]^2\right)^{3/2}}.$$

Primeiramente, fazemos

$$x = \cos\theta', y = \sin\theta' \cos(\varphi' - \varphi),$$

pelo que x e y percorrem duas vezes a superfície do círculo unitário quando θ' e φ' varrem todo seu domínio. Encontra-se assim

$$W = 4\mu\sigma R \int^{x^2+y^2} \int^{\leq 1} \frac{dxdy}{\left(1 - \left[\dot{\rho}x + \rho\dot{\theta}y\right]^2\right)^{3/2} \sqrt{1 - x^2 - y^2}}.$$

Agora, aplicamos a x e y "coordenadas polares planas" r e ψ, onde também escolhemos vantajosamente

$$\sqrt{1 - r^2} = z$$

ao invés de r. Isso resulta

$$W = 4\mu\sigma R \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^1 \frac{dx}{\left(1 - a^2 + a^2x^2\right)^{3/2}}$$

$$= 4\mu\sigma R \int_0^{2\pi} \frac{d\psi}{1 - a^2} = 4\mu\sigma R \int_0^{2\pi} \frac{d\psi'}{1 - v^2 \cos^2 \psi'}$$

com

$$a = \dot{\rho} \cos\psi + \rho\dot{\theta} \sin\psi,$$
$$v = \sqrt{\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\theta}^2}.$$

Obtemos, simplesmente por desenvolvimento em série da última integral (cálculo direto ou integração no plano complexo), o resultado

$$W = \frac{8\pi\mu\sigma R}{\sqrt{1 - v^2}} = \frac{8\pi\mu\sigma R}{\sqrt{1 - \dot{\rho}^2 - \rho^2\dot{\theta}^2}}, \qquad (23)$$

que por (6) e (21) concorda com a parte não constante de (22), já que, de antemão, admitimos a velocidade da luz igual à unidade.

De passagem, notamos que a lei (1''') pertence à função Lagrangeana

$$L = \frac{\mu\mu'}{r}\left(\frac{2}{\sqrt{1-\dot{r}^2}} - 4\sqrt{1-\dot{r}^2} + 3\right) \tag{24}$$

que satisfaz

$$\dot{r}\frac{dL}{d\dot{r}} - L = W = \frac{\mu\mu'}{r}\left(\frac{2}{\left(1-\dot{r}^2\right)^{3/2}} - 3\right) \tag{25}$$

Integremos L de (24), semelhantemente ao que fazemos para W para a interação de nossa partícula pontual com a casca esférica, e obtemos, a menos de uma constante, a conhecida função Langrangeana relativística para uma massa

$$L = -mc^2\sqrt{1-\beta^2},$$

onde β mais uma vez é a relação entre a velocidade da partícula e a velocidade da luz.

A objeção mais grave que se levanta contra essa nota e sua implementação é que ela parece recorrer ao até hoje nunca demonstrado princípio de ação a distância. Indiscutivelmente, ninguém hoje em dia, nem mesmo o autor, consideraria a lei (1) ou (1') nesse sentido. Mas da mesma forma que podemos interpretar a influência aparentemente mínima e instantânea de uma estrela distante sobre um pêndulo terrestre pela introdução de uma propagação da gravidade segundo a velocidade da luz, parece a mim ser possível realizar-se os cálculos dos termos que dependem de $\dot{r}$, sem ferir o princípio de propagação à velocidade finita da interação gravitacional. Isso será verdadeiro se for possível encontrar uma relação tal que torne irrelevante, nos cálculos, o fato de utilizarmos o estado de movimento instantâneo ou o estado de movimento atrasado por um tempo de retardamento dependendo da propagação.

De outro modo, encontraríamos dificuldades conhecidas se considerarmos a sério o tempo de retardamento. Parece, então, a princípio, impossível mantermos a dependência em $\dot{r}$.. Podemos definir $\dot{r}$ de uma maneira empírica por meio da observação do efeito Doppler mas este só se aplica a dois observadores que trocam entre si sinais de luz, mas não ao "mesmo instante". A energia cinética de interação reduzida que se admitiu primeiramente divide-se novamente em dois termos. Além disso, a causa para a diferença do efeito Doppler, quando os dois corpos têm a mesma massa, pode ser devida à existência de outros corpos no universo que definem um sistema inercial para a luz tão bom quanto para o movimento das partículas consideradas.

Tenho por mim como possível que um subsequente desenvolvimento dessas idéias daria origem a várias modificações na teoria da relatividade geral. Essas questões representam uma área que nenhuma teoria moderna se aventurou ainda e para a qual nenhuma resposta concreta e vital foi encontrada. A apresentação aqui feita, sobre a variação dos movimentos relativos e não absolutos dos corpos abre uma área a ser trabalhada. Eu a fiz como um estágio intermediário útil e possível, que possibilite a compreensão de questões fundamentais, com origem puramente empírica, familiares a todos, de uma maneira simples e clara por princípio.

Zurique, Instituto de Física da Universidade

(Recebido em 16 de Junho de 1925)

3 Notas

Nota 1: Caso haja uma rotação entre os referenciais inerciais e o referencial das galáxias distantes ou das estrelas fixas, ela é menor do que $2 \cdot 10^{-8}$ *rad/ano*: SCHIFF, L.I., *Reviews of Modern Physics*, v. 36, p. 510-511, 1964, "Observational basis of Mach's principle".

Nota 2: O fato de que a teoria da relatividade geral de Einstein não implementa o princípio de Mach é bem conhecido. Os motivos deste fato estão bem explicados em: REINHARDT, M. *Zeitschritte fur Naturforschung* A, v. 28, p. 529-537, 1973, "Mach's principle - a critical review;" RAINE, D. J., *Reports on Progress in Physics*, v. 44, p. 1151-1195, 1981, "Mach's principle and space-time structure".

Nota 3: O resultado obtido por Schrödinger é exato e não aproximado, embora em suas contas tenha usado a aproximação de que a partícula está próxima ao centro da casca esférica. Isto havia sido mostrado por Helmholtz ao integrar a energia potencial eletromagnética de Weber $U = (q_1 q_2 / 4\pi\varepsilon_0 r)(1 - \dot{r}^2 / 2c^2)$. Suponhamos uma casca esférica de raio R uniformemente carregada com carga Q e densidade superficial de carga $\sigma = Q / 4\pi R^2$, em repouso e sem rotação, interagindo com uma carga de prova q localizada em qualquer lugar no interor da casca e se movendo com velocidade $\vec{v}$ em relação à casca esférica. Ao integrar a energia potencial de Weber para este caso Helmholtz obteve (HELMHOLTZ, H. V., *Philosophical Magazine*, v. 44, p. 530-537, 1872, "On the theory of eletrodynamics;" MAXWELL, J. C., *A treatise on Eletricity and Magnetism*, (New York: Dover, 1954), v. 2, cap. 23, art. 854, p. 484-485:

$$U = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R}\left(1 - \frac{v^2}{6c^2}\right).$$

Para detalhes ver: (Helmholtz, 1872), (Maxwell, 1954), (Assis, 1992 b) e (Assis, 1994, p. 193-198). Novamente Schrödinger parece desconhecer o trabalho de Helmholtz e não cita Maxwell também.

No caso de Schrödinger temos uma massa m interagindo com uma casca esférica de raio R e massa M uniformemente distribuída sobre ela. Um cálculo exatamente análogo leva então que a integração da energia potencial $U = -(Gm_1 m_2 / r)(1 - \alpha\dot{r}^2 / c^2)$, onde substituímos o γ de Schrödinger por α/c^2, sendo α um número adimensional que ele vai encontrar como sendo 3, dá como resultado exato:

$$U = -G\frac{mM}{R}\left(1 - \alpha\frac{v^2}{3c^2}\right).$$

Este é o resultado da Eq. (5) de Schrödinger, a menos do primeiro termo $-GmM/R$, que ele não considerou por ser constante e independente da velocidade da partícula.

Já sua Eq.(10) no sistema MKSA e com a definição $\gamma = \alpha/c^2$ seria escrita como

$$\frac{M}{R} = \frac{3c^2}{2G\alpha},$$

onde $M = 4\pi sR^2$ é a massa da casca esférica de raio R e densidade de massa superficial s, $c = 3 \cdot 10^8$ m/s e $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Nm^2/kg^2 é a constante gravitacional Newtoniana. Supondo que esta relação (10) seja verdadeira e substituindo-a no resultado anterior vem que a energia de interação de m com a casca esférica de massa M é dada por (invertendo a ordem dos termos):

$$U=\frac{mv^2}{2}-\frac{3}{2\alpha}mc^2.$$

Ou seja, esta é a energia clássica do corpo a menos de uma constante. E esta é a implementação do princípio de Mach por Schrödinger. Vale observar ainda que o termo constante $-3mc^2/2\alpha$ veio da integração do potencial Newtoniano $-Gm_1m_2/r$.

Nota 4: O problema de um corpo de massa *m* interagindo gravitacionalmente com uma massa grande *m'* (que pode ser considerada fixa) é tratado na mecânica clássica por $T + V$=const., onde T é a energia cinética do corpo, $T=mv^2/2$, e V sua energia potencial Newtoniana de interação gravitacional com o corpo m', $V=-Gmm'/r$. Em coordenadas polares com o corpo de massa *m'* fixo na origem vem que $v^2=\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2$ de modo que esta equação fica na forma

$$\frac{m}{2}\dot{r}^2+\frac{m}{2}r^2\dot{\varphi}^2-\frac{Gmm'}{r}=\text{const.}$$

A implementação do princípio de Mach como Schrödinger o faz é feita com a imposição de que a soma de todas as energias de interação de qualquer corpo com todo o universo seja uma constante. Os resultados (5) e (10) de Schrödinger levam a que a energia de interação gravitacional de *m* com as estrelas fixas é dada por $mv^2/2+$const. Já a energia de interação de *m* com *m'* é do tipo da de Weber, ou seja, $U=-(Gmm'/r)(1-\alpha\,\dot{r}^2/c^2)$, onde substituímos o k de Schrödinger pela nossa expressão usual G, e seu γ por α/c^2, sendo α uma constante adimensional. Usando novamente coordenadas polares vem então que nesta formulação:

$$\frac{m}{2}\left(\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2\right)-\frac{Gmm'}{r}\left(1-\alpha\frac{\dot{r}^2}{c^2}\right)=\text{const.}$$

ou seja,

$$\left(\frac{m}{2}+\frac{\alpha Gmm'}{rc^2}\right)\dot{r}^2+\frac{m}{2}r^2\dot{\varphi}^2-\frac{Gmm'}{r}=\text{const.}$$

Esta é a Eq.(11) de Schrödinger.

Podemos escrever esta equação como:

$$\frac{m_r}{2}\dot{r}^2+\frac{m_t}{2}r^2\dot{\varphi}^2-\frac{Gmm'}{r}=\text{const.}$$

onde $m_t=m$ e $m_r=m\left(1+2\alpha Gm'/rc^2\right)$. Ao comparar esta expressão com a da mecânica clássica, podemos dizer que na formulação de Schrödinger o planeta se comporta como se tivesse uma "massa tangencial efetiva" m_t inalterada, mas com uma "massa radial efetiva" m_n aumentada em relação a *m*.

Schrödinger vai mostrar que é esta anisotropia da massa inercial efetiva do planeta que vai explicar a precessão do periélio neste modelo. Isto dá uma grande importância à observação anterior de Schrödinger de que o planeta se comporta como tendo "massas inerciais efetivas" diferentes em diferentes direções, dependendo da distribuição de massas com as quais está interagindo. Neste caso o responsável pela anisotropia da massa do planeta é o sol, que interage com ele radialmente mas não tangencialmente. O importante aqui é que a precessão do periélio dos planetas, que é bem conhecida quantitativamente a muito tempo, passa a ser um ponto a favor do princípio de Mach e de que a anisotropia das massas inerciais é real. Isto é relevante, considerando-se o aparecimento de alguns artigos nos últimos anos criticando negativamente este aspecto do princípio de Mach e afirmando que não existe esta anisotropia da massa inercial: COCCONI, G. e SALPETER, E. E., *Physical Review Letters*, v. 4, p. 176-177, 1960, "Upper limit for the anisotropy of inertia from the Mössbauer effect"; SHERWIN, C. W. et al., *Physical Review Letters*, v. 4, p. 399-401, 196, "Search for the anisotropy of inertia the Mössbauer effect in "; HUGHES,H.W., ROBINSON, H. G. e BELTRAN-LOPEZ V., *PhysicalReview Letters*, v. 4, p. 342-346, 1960, "Upper limit for the anisotropy of inertial mass from nuclear resonance experiments".

Vemos então que, pelo menos quando das interações puramente gravitacionais, como no caso do movimento planetário, o efeito da anisotropia das massas inerciais é um fato bem comprovado experimentalmente pela precessão do periélio dos planetas.

Nota 5: Para cálculos mais detalhados de como se obtém a precessão do periélio dos planetas usando uma lei de Weber para a gravitação, ver: ASSIS, A. K. T., *Foundations ofPhysics Letters*, v. 2, p. 301-318, 1989, ōn Mach's principle".

Nota 6: Vamos apresentar seu resultado no sistema de unidades MKSA. Sua equação (10), com $\gamma = \alpha/c^2$, sendo $\alpha = 3$ como descobriu para obter a precessão do periélio dos planetas de acordo com as observações, e com $k = G$, fica na forma

$$\frac{M}{R} = \frac{4\pi s R^2}{R} = \frac{3c^2}{2G\alpha} = \frac{c^2}{2G} = 6{,}7 \cdot 10^{26}\, kg/m,$$

onde $s = M/4\pi R^2$ é a densidade de massa superficial da casca esférica de raio R e massa M. Substituindo R por r' e s por $d.dr'$, onde d é a densidade volumétrica de massa da matéria distante (estrelas fixas para Mach e Schrödinger, e galáxias hoje em dia) e dr' é a espessura da casca esférica, e integrando r' de 0 a R vem:

$$\int_0^R \frac{4\pi r'^2 d}{r'} dr' = 2\pi R^2 d = \frac{c^2}{2G} = 6{,}7 \cdot 10^{26}\, kg/m,$$

que é o resultado (10'') do Schrödinger. Ou seja, para que ele obtenha a energia cinética da mecânica clássica este resultado tem de valer.

Ao avaliar o valor de $2\pi R^2 d$ para a nossa galáxia, Schrödinger obtém, com $R \approx 200\ parsec \approx 6 \cdot 10^{18}\ m$ e com $d \approx 4 \cdot 10^{-21}\ kg/m^3$: $2\pi R^2 d \approx 10^{17}\ kg/m$..

Como isto é muito menor do que o valor necessário para se derivar a energia cinética, Schrödinger conclui que a matéria responsável pela inércia dos corpos na terra e no sistema solar está muito além da nossa galáxia.

Hubble desenvolveu seus trabalhos principais a partir de 1924, quando estabeleceu que as nebulosas eram sistemas estelares similares à via láctea, externas a ela. Em 1929, portanto após o trabalho de Schrödinger, descobriu a lei que relaciona o redshift das galáxias com suas distâncias. Colocando nesta equação acima $R = c/H_0$ e $d = \rho_0$, onde H_0 é a constante de Hubble e ρ_0 é a densidade média de matéria no universo, obtemos que vale o resultado: $2\pi R^2 d \approx c^2/2G$. Ou seja, além de se derivar esta relação, esta implementação do princípio de Mach com uma lei de Weber apresenta um novo dado quantitativo a favor do princípio de Mach.

Nota 7: Recentemente Wesley chegou a uma expressão análoga, sem conhecer o trabalho de Schrödinger: WESLEY, J. P., *Foundations of Physics Letters*, v. 3, p. 581-605, 1900, "Weber electrodynamics, Part III. Mechanics, gravitation".

Agradecimentos:

Um dos autores (AKTA) deseja agradecer ao CNPq, FAPESP e FAEP (UNICAMP) pelo auxílio financeiro nos últimos anos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ASSIS, A.K.T. On Mach's principle. *Foundations of Physics Letters*, v. 2, p. 301-318, 1989.

ASSIS, A.K.T. Wilhelm Eduard Weber (1804-1891), sua vidae sua obra. *Revista da Sociedade Brasileira de História da Ciência*, v. 5, p. 53-59, 1991.

ASSIS, A.K.T. *Curso de Eletrodinâmica de Weber*. Campinas: Setor de Publicações do Instituto de Física da UNICAMP, 1992a.

ASSIS, A.K.T. Teorias de ação a distância: uma tradução comentada de um texto de James Clerk Maxwell. *Revista da Sociedade Brasileira de História da Ciência*, v. 7, p. 53-76, 1992b.

ASSIS, A.K.T. *Weber's Electrodynamics*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1994.

COCCONI, G., **SALPETER**, E.E. Upper limit for the anisotropy of inertia from the Mössbauer effect. *Physical Review Letters*, v. 4, p. 176-177, 1960.

HELMHOLTZ, H. V. On the theory of electrodynamics. *Philosophical Magazine*, v. 44, p. 530-537, 1872

HUGHES, V. W., **ROBINSON**, H. G., **BELTRAN-LOPEZ**, V. Upper limit for the anisotropy of inertial mass from nuclear resonance experiments. *Physical Review Letters*, v. 4, p. 342-346, 1960.

MAXWELL, J. C. A *Treatise on electricity and magnetism*. New York: Dover, 1954, v. 2, cap. 23, art. 854, p. 484-485

RAINE, D.J. Mach's principle and space-time structure. *Reports on Progress in Physics*, v. 44, p. 1151-1195, 1981.

REINHARDT, M. Mach's principle - a critical review. *Zeitschritte fur Naturforschung A*, v. 28, p. 529-537, 1973.

REISSNER, H. Über die Relativität der Beschleunigungen in der Mechanik. *Physikalishe Zeitschrift*, v. 15, p. 371-375, 1914.

REISSNER, H. Über eine Möglichkeit die Gravitation als unmittelbare Folge der Relativität der Trägheit. *Physikalishe Zeitschrift*, v. 16, p. 179-185, 1915.

SHERWIN, C. W. e outros, Search for the anisotropy of inertia using the Mössbauer effect in Fe^{57}. *Physical Review Letters*, v. 4, p. 399-401, 1960.

SCHIFF, L. I. Observational basis of Mach's principle. *Reviews of Modern Physics*, v. 36, p. 510-511, 1964.

WESLEY, J. P. Weber electrodynamics, Part III. Mechanics, gravitation. *Foundation of Physics Letters*, v. 3, p. 581-605, 1990

A.L. XAVIER JR. é Professor do Departamento de Matemática Aplicada IMECC/UNICAMP e Doutorando em Física.

Endereço: Instituto de Física "Gleb Wataghin", Universidade Estadual de Campinas - Unicamp
13083-970 Campinas, São Paulo - Brasil

A.K. T. Assis é professor do Departamento de Ráios Cósmicos e Cromologia

Endereço: Instituto de Física "Gleb Wataghin", Universidade Estadual de Campinas - Unicamp
13083-970 Campinas, São Paulo - Brasil

Errata do artigo de A. L. Xavier Jr. e A. K. T. Assis, "O cumprimento do postulado de relatividade na mecânica clássica – uma tradução comentada de um texto de Erwin Schrödinger sobre o princípio de Mach", Revista da Sociedade Brasileira da História da Ciência, Vol. 12, págs. 3-18 (1994):

- Pág. 6, a equação (2) deve ser:

$$\left.\begin{aligned} r^2 &= R^2 + \rho^2 - 2R\rho\cos(R\rho) \\ &= R^2 + \rho^2 - 2R\rho\left[\cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\varphi-\varphi')\right]. \end{aligned}\right\}$$

- Pág. 7, a equação (5) deve ser:

$$\left.\begin{aligned} W &= \frac{\gamma\mu\sigma R^2}{R}\int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^{\pi} \sin\theta' d\theta' \left[\dot{\rho}^2\cos^2\theta' + \right. \\ &+ 2\rho\dot{\rho}\dot{\theta}\sin\theta'\cos\theta'\cos(\varphi-\varphi') + \\ &\left. + \rho^2\dot{\theta}^2\sin^2\theta'\cos^2(\varphi-\varphi')\right] = \frac{4\pi\gamma\mu\sigma R}{3}\left(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\theta}^2\right). \end{aligned}\right\}$$

- Pág. 8, a frase depois da Eq. (11) deve ser:

A presença do Sol produz, além da atração gravitacional, também o efeito de que a massa inercial "radial" do planeta seja um pouco maior do que a massa inercial "tangencial" (Nota 4). Usando a lei das áreas, que permanece inalterada,

- Pág. 8, a equação (12) deve ser:

$$r^2\dot{\varphi} = f\ ,$$

- Pág. 9, a equação (17) deve ser:

$$\varphi = \left(1 + \frac{\gamma k^2 m'^2}{f^2}\right)\arcsin\eta - \gamma k m'\sqrt{C-\eta^2} + const.$$

- Pág. 9, a equação embaixo da equação (19) deve ser:

$$\frac{k^2 m'^2}{f^2} = \frac{4\pi^2 a^4}{b^2\tau^2} = \frac{4\pi^2 a^2}{\tau^2\left(1-\varepsilon^2\right)}$$

- Pág. 9, a equação (20) deve ser:

$$\Delta = \frac{8\pi^3 \gamma a^2}{\tau^2 \left(1-\varepsilon^2\right)} \; .$$

- Pág. 11, a equação (1'') deve ser:

$$W = \frac{\mu\mu'}{r}\left(\frac{2}{\left(1-\dot{r}^2\right)^{3/2}} - 3 \right) \; ;$$

- Pág. 12, a segunda equação deve ser:

$$W = 4\mu\sigma\, R \iint\limits_{x^2+y^2\leq 1} \frac{dxdy}{\left(1-\left[\dot{\rho}\, x + \rho\dot{\theta}\, y\right]^2\right)^{3/2} \sqrt{1-x^2-y^2}}$$

- Pág. 12, a terceira equação deve ser:

$$\sqrt{1-r^2} = z$$

- Pág. 12, a quarta equação deve ser:

$$W = 4\mu\sigma\, R \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^1 \frac{dz}{\left(1-a^2+a^2 z^2\right)^{3/2}}$$

$$= 4\mu\sigma\, R \int_0^{2\pi} \frac{d\psi}{1-a^2} = 4\mu\sigma\, R \int_0^{2\pi} \frac{d\psi'}{1-v^2 \cos^2 \psi'}$$